الشرح الوافى

الجبر للصف الثانى الثانوى

الفصل الدراسى الاول

اعداد الاستاذ / على حمدون
معلم اول بمعهد بنى عدى الثانوى
بنين

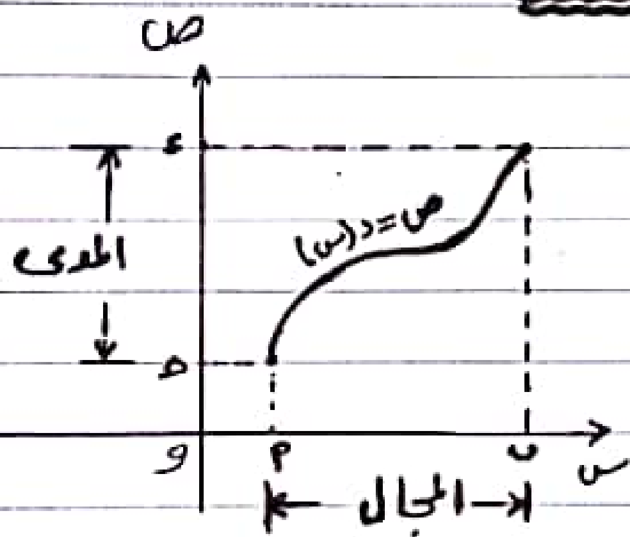
الدوال الحقيقية ورسم منحنيات الدوال

١ - الدوال الحقيقية
٢ - العمليات على الدوال
٣ - دالة التركيب ومجالها
٤ - بعض خواص الدوال
٥ - اطراد الدوال
٦ - التمثيل البيانى والتحويلات الهندسية
٧ - حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

الدالة ذات المتغير الحقيقي

الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة حقيقية إذا كان كل من المجال (س) والمجال المقابل (ص) هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

* تحديد مجال الدوال الحقيقية ومداها :-



* مجال الدالة :-

(1) هو مجموعة العناصر التي يمكن التعويض بها في قاعدة الدالة والتي تكون عندها الدالة معرفة.

(2) هو الفترة المقابلة لمنحنى الدالة على محور السينات في هذا الشكل مثلاً نجد أن مجال الدالة د(س) = [أ ، ب]

* مدى الدالة :-

(1) هو مجموعة صور عناصر المجال بواسطة قاعدة الدالة

(2) هو الفترة المقابلة لمنحنى الدالة على محور الصادات مثلاً في هذا الشكل نجد أن مدى الدالة د(س) = [هـ ، ء]

ملاحظة

قبل رسم منحنيات الدوال لا بد من إيجاد مجال هذه الدوال لمعرفة الفترة التي يرسم فيها المنحنى ومعرفة ما إذا كان هناك ثغرات أو قفزات لمنحنى الدالة

(١) الدالة كثيرة الحدود :-

مجال الدالة كثيرة الحدود يساوي ح ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها

(٢) الدالة الكسرية :-

إذا كانت د دالة كسرية حيث $د(س) = \frac{هـ(س)}{ى(س)}$

حيث هـ ، ى دوال كثيرات حدود فإن

مجال الدالة د = ح - مجموعة أصفار المقام

مثلا :-

إذا كانت $د(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$

$\therefore د(س) = \frac{س - ٣}{(س - ٣)(س - ٢)}$

$\therefore$ مجال الدالة = ح - {٣ ، ٢}

$د(س) = \frac{١}{س - ٢}$

إذا كانت $د(س) = \frac{س}{س^٢ + ١}$

هنا أصفار المقام = ϕ

$\therefore$ مجال الدالة = ح

(٣) إذا كانت $د(س) = \sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث

ن ∈ ص$^+$ ، ن > ١ ، هـ(س) كثيرة حدود فإن :-

(١) إذا كانت ن عدد فردي فإن مجال الدالة = ح

(٢) إذا كانت ن عدد زوجي فإن مجال الدالة هو مجموعة قيم س بشرط هـ(س) ≥ صفر

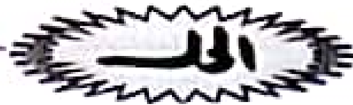
مثال

عين مجال الدوال الآتية :-

(١) $د(س) = \sqrt[٣]{س + ٢}$

(٢) $د(س) = \sqrt{س + ٢}$

(٣) د(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ (٤) د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$



(١) ∵ د(س) = $\sqrt[٣]{س + ٢}$ دليل الجذر عدد فردي

∴ المجال = ح

(٢) ∵ د(س) = $\sqrt{س+٢}$ دليل الجذر عدد زوجي

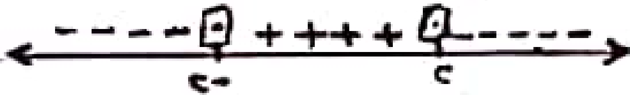
∴ مجال الدالة هو قيم س التي تجعل س+٢ ≥ ٠

∴ س ≥ -٢ منها مجال الدالة = [-٢ ، ∞[

(٣) ∵ د(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ دليل الجذر عدد زوجي

وتحت الجذر دالة تربيعية ⟵ نبحث اشارة المقدار تحت الجذر

وذلك بوضع ٤-س^٢ = ٠ ∴ س = ± ٢



∴ مجال الدالة = [-٢ ، ٢]

(٤) د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$ دليل الجذر عدد زوجي

∴ نبحث المقدار اشارة المقدار الذي تحت الجذر

بوضع س^٢-٤ = ٠ ∴ س = ± ٢



∴ مجال الدالة = ح -]-٢ ، ٢[

* تدريب : أوجد مجال الدوال الآتية

(١) د(س) = $\sqrt{س^٣ + ١}$ (٢) د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٥س + ٦}$

(٤) اذا كانت $د(س) = \frac{هـ(س)}{ﻫ(س)}$ وكانت هـ(س) أو ﻫ(س) أو كلاهما دوال جذرية

فان مجال الدالة د = {م$_١$ ∩ م$_٢$} − {أصفار دالة المقام}

حيث م$_١$ مجال هـ(س) ، م$_٢$ مجال ﻫ(س)

مثال

عين مجال الدوال الاتية

(١) $د(س) = \frac{س}{\sqrt{١-س}}$ (٢) $د(س) = \frac{\sqrt{س-٣}}{س^٢-٤}$

(٣) $د(س) = \frac{\sqrt{س-٣}}{\sqrt{س-٥}}$ (٤) $د(س) = \sqrt{\frac{س-٣}{س-٥}}$

الحل

(١) ∵ $د(س) = \frac{س}{\sqrt{١-س}}$ ⟸ ∴ م$_١$ = ح

م$_٢$ =]−∞، ١]

اصفار دالة المقام عند ١−س = ٠ ∴ اصفار المقام = {١}

∵ مجال الدالة د = (م$_١$ ∩ م$_٢$) − {اصفار المقام}

∴ المجال =]−∞، ١] − {١} ⟸ ∴ مجال الدالة =]−∞، ١[

(٢) ∵ $د(س) = \frac{\sqrt{س-٣}}{(س-٢)(س+٢)}$ ∴ م$_١$ = [٣، ∞[

∴ م$_٢$ = ح

اصفار دالة المقام = {−٢، ٢} ، م$_١$ ∩ م$_٢$ = [٣، ∞[

∴ مجال الدالة د = [٣، ∞[− {−٢، ٢} = [٣، ∞[

(٣) ∵ م$_١$ = [٣، ∞[، م$_٢$ = [٥، ∞[

∴ م$_١$ ∩ م$_٢$ = [٥، ∞[، أصفار المقام = {٥}

∴ مجال الدالة د =]٥، ∞[

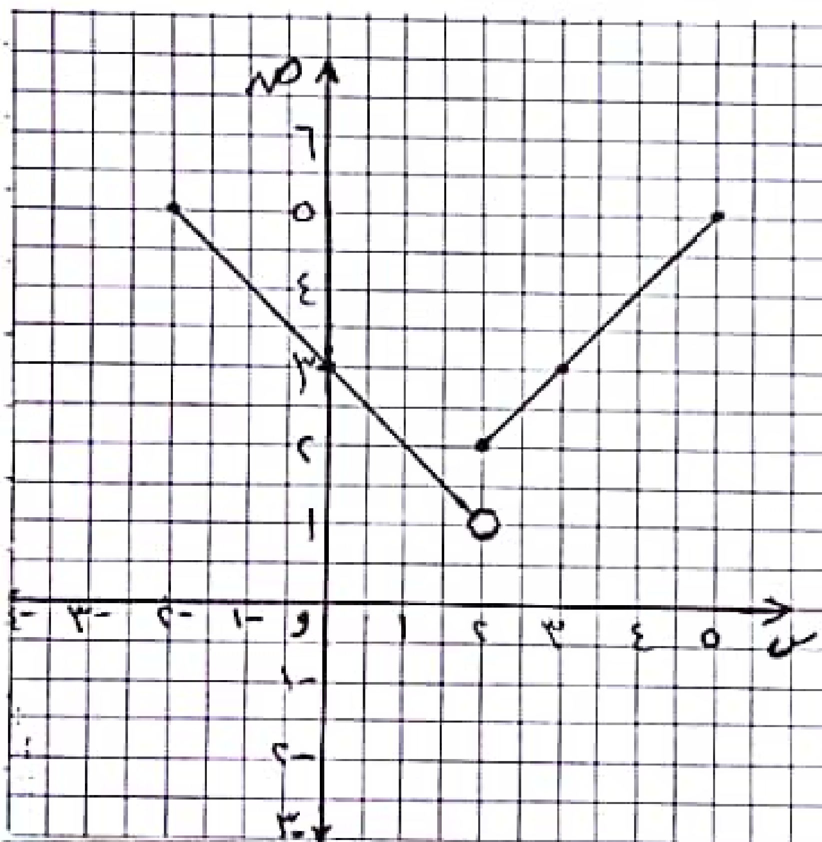
(٤) يترك للطالب

مثال ارسم الشكل البيانى للدوال الآتية :

(١) د(س) = { ٣ - س عندما -٢ ≤ س < ٢ ، س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥ }

(٢) د(س) = { س٢ + ١ عندما -٣ ≤ س < ٠ ، س + ٢ عندما ٠ ≤ س ≤ ٣ }





(١) مجال الدالة = [-٢ ، ٥]

(٢) تعيين المجال ورسم المنحنى يترك للطالب

العمليات على الدوال

إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالها $م_1$ ، $م_2$ على الترتيب فإنه

(1) $(د_1 \pm د_2)(س) = د_1(س) \pm د_2(س)$
ومجالها هو $م_1 \cap م_2$

(2) $(د_1 \times د_2)(س) = د_1(س) \times د_2(س)$ ومجالها هو $م_1 \cap م_2$

(3) $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_2(س) \neq 0$

مجالها هو $(م_1 \cap م_2) - \{$أصفار دالة المقام $د_2\}$
$= م_1 - \{$أصفار بسط ومقام $د_2\}$

مثال

إذا كانت $د(س) = \frac{س}{س+1}$ ، $ر(س) = \frac{س+1}{س-2}$ أوجد

(1) $(د+ر)(س)$ موضحاً مجالها ثم أوجد قيمة $(د+ر)(3)$
(2) $(د \cdot ر)(س)$ " " " " قيمة $(د \cdot ر)(3)$
(3) $(\frac{د}{ر})(س)$ موضحاً مجالها ثم أوجد $(\frac{د}{ر})(-1)$ ، (1)

الحل

$\because م_1 = ح - \{-1\}$ ، $م_2 = ح - \{2\}$

(1) $\therefore (د+ر)(س) = \frac{س}{س+1} + \frac{س+1}{س-2} = \frac{س(س-2) + (س+1)^2}{(س+1)(س-2)}$

$\therefore (د+ر)(س) = \frac{س^2 - 2س + س^2 + 2س + 1}{(س+1)(س-2)} = \frac{2س^2 + 1}{(س+1)(س-2)}$

∴ مجال $(د + ر)(س) = م_1 \cap م_2 = ح - \{-٣ ، -١ ، ٢\}$

∴ $(د + ر)(٣) = \frac{٢ \times ٩ + ١}{٤ \times ١} = \frac{١٩}{٤}$

(٢) ب $(د \cdot ر)(س) = \frac{س}{س+١} \times \frac{س+١}{س-٢} = \frac{س}{س-٢}$

ومجالها $= م_1 \cap م_2 = ح - \{-٣ ، -١ ، ٢\}$

∴ $(د \cdot ر)(٣) = \frac{٣}{١} = ٣$

(٣) ∵ $(\frac{د}{ر})(س) = \frac{س}{س+١} \times \frac{س-٢}{س+١} = \frac{س(س-٢)}{(س+١)^٢}$

ومجالها $= (م_1 \cap م_2) - \{-٣ ، ١\} = ح - \{-٣ ، -١ ، ٢\}$

∴ $(\frac{د}{ر})(-١)$ = غير معرف لان $-١ \notin$ مجال $(\frac{د}{ر})(س)$

∴ $(\frac{د}{ر})(١) = \frac{١ \times -١}{(٢)^٢} = \frac{-١}{٤}$

تركيب الدوال

اذا كانت (د) دالة فى س و (ر) دالة فى س أيضاً وكان مدى الدالة د تقاطع مجال الدالة ر لا يساوى $\emptyset$ فانه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من الدالتين وهى

ع = ر ∘ د وتكون ع(س) = (ر ∘ د)(س)

وتقرأ ر تركيب د أو ر بعد د حيث

$(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

مثال اذا كانت د(س) = س^2 ، ر(س) = س + ١

اوجد (١) (د∘ر)(١) (٢) (د∘د)(-١) (٣) (ر∘د)(١)

الحل

(١) ∵ د(س) = س^2 ، ر(س) = س + ١

∴ (د∘ر)(س) = د(ر(س)) = $(\text{س}+1)^2$ = س^2 + ٢س + ١

∴ (د∘ر)(١) = $(1+1)^2$ = ٤

(٢) ∵ (د∘د)(س) = د(د(س)) = $(\text{س}^2)^2$ = س^4

∴ (د∘د)(-١) = $(-1)^4$ = ١

(٣) ∵ (ر∘د)(س) = ر(د(س)) = س^2 + ١

∴ (ر∘د)(١) = ١ + ١ = ٢

مجال دالة التركيب

* لتعيين مجال الدالة (د∘ر) نتبع الاتي

(١) نوجد مجال الدالة الثانية ر وليكن م_1

(٢) نوجد مجال الدالة الاولى د وليكن م_2

(٣) نوجد قيم س التي تجعل الدالة الثانية ر(س) في مجال الدالة الاولى د وليكن م_3

* ولتعيين هذه القيم نضع ر(س) ∈ مجال الدالة د ومن خلال هذه العلاقة نوجد م_3

(٤) مجال دالة التركيب (د∘ر) = $\text{م}_1 \cap \text{م}_3$

مثال اذا كانت د(س) = $\frac{1}{\text{س}}$ ، ر(س) = س + ٣

اوجد (د∘ر)(س) ، (ر∘د)(س) وحدد مجال كل منها

الحل

∵ ر(س) = س + ٣ ∴ م_1 = ح ← (١)

∵ $د(س) = \frac{1}{س}$ ∴ مجال الدالة د = ح - {٣، ٤}

∴ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = \frac{1}{س+٣}$ ⟵ ②

* لايجاد م٢ (قيم س التي تجعل ر(س) في مجال الدالة د)
نضع ر(س) ∋ مجال الدالة د

∴ س + ٣ ∋ ح - {٣، ٤} ⟸ منها س + ٣ ≠ ٠
∴ س ≠ -٣ ⟸ ∴ م٢ = ح - {-٣، ٣} ⟵ ③
∵ مجال دالة التركيب (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢
∴ المجال = ح ∩ (ح - {-٣، ٣}) ∴ المجال = ح - {-٣، ٣}

(٢) ∵ $د(س) = \frac{1}{س}$ ∴ م١ = ح - {٣، ٤} ⟵ ①

∵ ر(س) = س + ٣ ∴ مجال الدالة ر = ح

∴ $(ر \circ د)(س) = ر(د(س)) = \frac{1}{س} + ٣$ ⟵ ②
* لايجاد م٢ نضع د(س) ∋ مجال الدالة ر
∴ $\frac{1}{س}$ ∋ ح ⟸ ∴ منها س ≠ ٠
∴ م٢ = ح - {٣، ٤} ⟵ ③
∴ مجال دالة التركيب (ر ∘ د) = م١ ∩ م٢
∴ المجال = (ح - {٣، ٤}) ∩ (ح - {٣، ٤}) = ح - {٣، ٤}

مثال
اذا كانت $د(س) = س^٢ - ٣$ ، $ر(س) = \sqrt{س - ٢}$
اوجد (د ∘ ر) محدداً مجالها ثم أوجد (د ∘ ر)(٢)

الحل

∵ $ر(س) = \sqrt{س - ٢}$ ∴ م١ = [٢، ∞[⟵ ①

∵ $د(س) = س^٢ - ٣$ ∴ مجال الدالة د = ح

∴ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = (\sqrt{س-٢})^٢ - ٣$

∴ $(د \circ ر)(س) = س - ٥$ ← (٢)

* لايجاد $م_٢$ نضع ر(س) ∈ مجال الدالة د

∴ $\sqrt{س-٢} \in ح$ منها $س \geq ٢$ ∴ $م_٢ = [٢، \infty[$ ← (٣)

∴ مجال دالة التركيب $(د \circ ر) = م_١ \cap م_٢$

∴ المجال $= [٢، \infty[\cap [٢، \infty[$ ∴ المجال $= [٢، \infty[$

∴ $(د \circ ر)(٢) = ٢ - ٥ = -٣$

مثال

اذا كانت $د(س) = \sqrt{س-٢}$ ، $ر(س) = \sqrt{٤-س}$

اوجد د∘ر موضحاً مجالها

الحل

∵ $ر(س) = \sqrt{٤-س}$ ∴ $م_١ =]-\infty، ٤]$ ← (١)

∵ $د(س) = \sqrt{س-٢}$ ∴ مجال الدالة د $= [٢، \infty[$

∴ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = \sqrt{\sqrt{٤-س} - ٢}$ ← (٢)

* لايجاد $م_٢$ نضع ر(س) ∈ مجال الدالة د

∴ $\sqrt{٤-س} \in [٢، \infty[$ ∴ $\sqrt{٤-س} \geq ٢$

∴ $٤ - س \geq ٤$

منها $-س \geq ٠$ ∴ $س \leq ٠$ ⟸ ∴ $م_٢ =]-\infty، ٠]$ ← (٣)

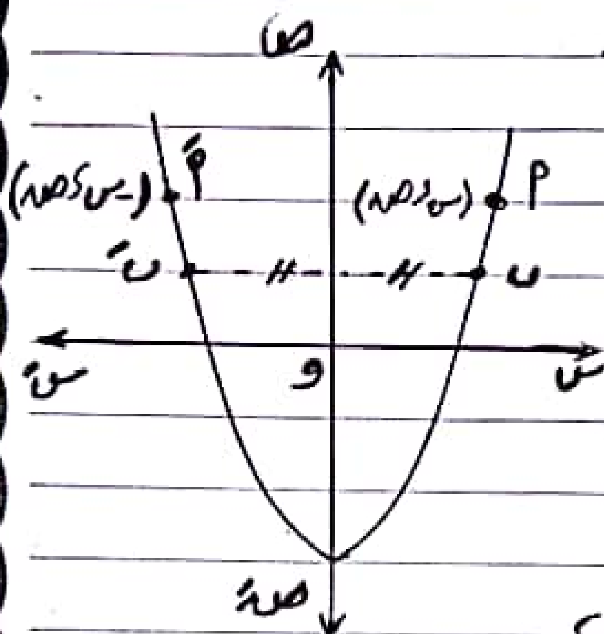
∴ مجال دالة التركيب $(د \circ ر) = م_١ \cap م_٢$

∴ المجال $=]-\infty، ٤] \cap]-\infty، ٠]$

∴ المجال $=]-\infty، ٠]$

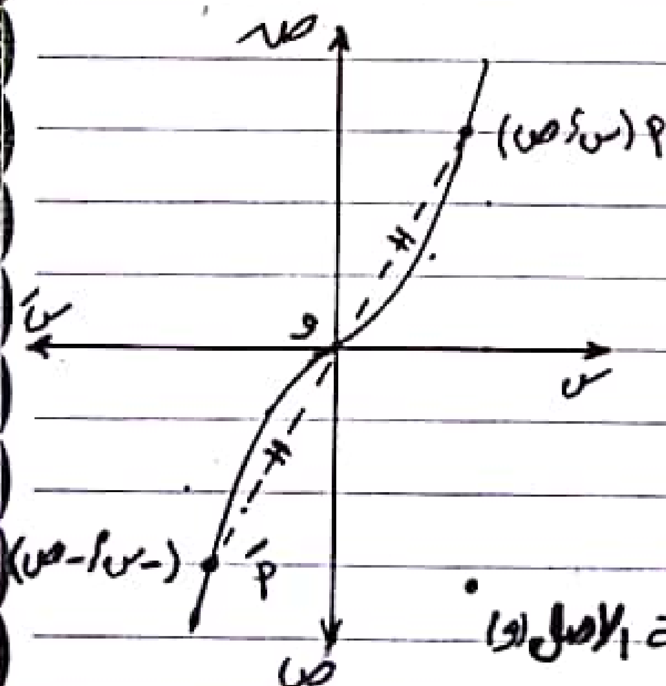
بعض خواص الدوال

* التماثل حول محور الصادات :-



يكون الشكل البياني لمنحنى دالة متماثلا حول محور الصادات اذا كان لكل نقطة أ(س، ص) ∈ المنحنى توجد نقطة أخرى أ(-س، ص) ∈ المنحنى بحيث تكون أ هي صورة أ بالانعكاس في محور الصادات

* التماثل حول نقطة الأصل :-



يكون الشكل البياني لمنحنى دالة متماثلا حول نقطة الأصل اذا كان لكل نقطة أ (س، ص) ∈ المنحنى توجد نقطة أخرى أ (-س، -ص) ∈ المنحنى بحيث تكون أ هي صورة أ بالانعكاس في نقطة الأصل (و)

الدالة الزوجية

يقال أن الدالة د زوجية اذا كان لكل س، -س ∈ مجال الدالة د يكون د(-س) = د(س) ويكون منحنى الدالة متماثلاً حول محور الصادات

الدالة الفردية

يقال أن الدالة د فردية اذا كان لكل س ، -س ∈ مجال الدالة د يكون د(-س) = -د(س) ويكون منحنى الدالة متماثلاً حول نقطة الأصل

ملاحظات هامة

(١) اذا كانت د(-س) ≠ د(س) ، د(-س) ≠ -د(س) فان الدالة د ليست زوجية وليست فردية

(٢) اذا كانت س ، -س ∉ مجال الدالة فان الدالة د تكون ليست فردية وليست زوجية

مثال

ابحث نوع الدوال الاتية من حيث كونها زوجية أم فردية

(١) د(س) = ٣س^{٢} (٢) د(س) = س^{٢} ، س ∈ [٠ ، ٦]

(٣) د(س) = ٢س^{٣} (٤) د(س) = √(س - ١)

(٥) د(س) = جتا س (٦) د(س) = جا س

الحل

(١) ∵ د(س) = ٣س^{٢} ∴ مجال الدالة = ح

∴ بفرض أن س ، -س ∈ مجال الدالة فإنه

د(-س) = ٣(-س)^{٢} = ٣س^{٢} = د(س) ← الدالة زوجية

(٢) د(س) = س^{٢} ، س ∈ [٠ ، ٦] ∴ مجال الدالة = [٠ ، ٦]

∴ لكل س ∈ مجال الدالة فإن -س ∉ مجال الدالة

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٣) ∵ د(س) = ٢س^{٣} ∴ مجال الدالة = ح

∴ د(-س) = ٢ × (-س)^{٣} = -٢س^{٣} = -د(س) ← الدالة فردية

(٤) ∵ د(س) = $\sqrt{س - ١}$ ∴ مجال الدالة [١ ، ∞[
∴ لكل س ∈ [١ ، ∞[لا يوجد بالضرورة -س ∈ [١ ، ∞[
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٥) ∵ د(س) = جتا س ∴ مجال الدالة = ح
وبفرض أنه -س ، س ∈ ح فإن
د(-س) = جتا (-س) = جتا س = د(س) ← الدالة زوجية

(٦) ∵ د(س) = جا س ∴ مجالها = ح
وبفرض أنه س ، -س ∈ ح فإن
د(-س) = جا(-س) = - جا س = - د(س) ← الدالة فردية

مثال
ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية

(١) د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٦}$ (٢) د(س) = $\sqrt[٣]{س^٣ + س}$

(٣) د(س) = $س^٣ - \frac{١}{س}$ (٤) د(س) = س جتا س

الحل

(١) ∵ د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٦}$ ∴ مجال الدالة = ح
وبفرض أنه -س ، س ∈ مجال الدالة فإنه
د(-س) = $\sqrt{(-س)^٢ + ٦}$ = $\sqrt{س^٢ + ٦}$ = د(س) ← الدالة زوجية

(٢) ∵ د(س) = $\sqrt[٣]{س^٣ + س}$ ∴ مجال الدالة = ح
وبفرض أنه -س ، س ∈ ح فإنه
د(-س) = $\sqrt[٣]{(-س)^٣ + (-س)}$ = $\sqrt[٣]{-س^٣ - س}$ = - $\sqrt[٣]{س^٣ + س}$
= - د(س) ← الدالة فردية

Scanned by CamScanner

(٣) ∵ $د(س) = س^{3} - \frac{1}{س}$ مجالها = ح − {٠}

∴ بفرض أن لكل س ∈ مجال الدالة يوجد −س ∈ مجال الدالة

∴ $د(-س) = (-س)^{3} - \frac{1}{-س} = -س^{3} + \frac{1}{س}$

$= -\left[س^{3} - \frac{1}{س}\right] = -د(س)$ ← الدالة فردية

(٤) ∵ د(س) = س جتا س ← مجال الدالة = ح

∴ د(−س) = −س جتا(−س) = −س جتا س

= −(س جتا س) = −د(س) ← الدالة فردية

مثال ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية

(١) $د(س) = \begin{cases} ٢س \text{ ، } س \geq ٠ \\ -٢س \text{ ، } س < ٠ \end{cases}$ (٢) $د(س) = \begin{cases} ٢س + س^{2} \text{ ، } س \geq ٠ \\ ٢س - س^{2} \text{ ، } س < ٠ \end{cases}$

الحل

١) مجال الدالة = ح وبفرض أن س ، −س ∈ مجال الدالة

∴ $د(-س) = \begin{cases} ٢(-س) \text{ ، } -س \geq ٠ \\ -٢(-س) \text{ ، } -س < ٠ \end{cases}$ ∴ $د(-س) = \begin{cases} -٢س \text{ ، } س \leq ٠ \\ ٢س \text{ ، } س > ٠ \end{cases}$

∴ $د(-س) = \begin{cases} ٢س \text{ ، } س \geq ٠ \\ -٢س \text{ ، } س < ٠ \end{cases} = د(س)$ ← الدالة زوجية

(٢) $د(-س) = \begin{cases} ٢(-س) + (-س)^{2} \text{ ، } -س \geq ٠ \\ ٢(-س) - (-س)^{2} \text{ ، } -س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} -٢س + س^{2} \text{ ، } س \leq ٠ \\ -٢س - س^{2} \text{ ، } س > ٠ \end{cases}$

∴ $د(-س) = \begin{cases} -(٢س + س^{2}) \text{ ، } س \geq ٠ \\ -(٢س - س^{2}) \text{ ، } س < ٠ \end{cases} = -د(س)$ ← الدالة فردية

ملاحظات هامة

(١) اذا كانت د(س) زوجية فى فترة ما [أ، ب] فان
أ = - ب ، أ + ب = صفر

(٢) الدالة الزوجية متماثلة حول محور الصادات (المستقيم س = ٠)

(٣) اذا كانت الدالة د زوجية فانه د(-أ) = د(أ)
وبالتالى يكون د(أ) + د(-أ) = ٢ د(أ) = ٢ د(-أ)

(٤) اذا كانت د دالة فردية فانه د(-أ) = - د(أ)
وبالتالى د(أ) + د(-أ) = صفر

(٥) اذا كانت الدالة د زوجية على الفترة [أ، ب]
فان د(أ + ٣) = د(ب - ٣)

مثال

أكمل ما يأتى

(١) اذا كانت د دالة زوجية فان د(٢) + د(-٢) = ...

(٢) اذا كانت د دالة فردية فإنه د(٢) + د(-٢) = ...

(٣) اذا كانت د دالة زوجية فى الفترة [أ، ب] فانه ب = ...

(٤) اذا كانت د دالة فردية ، د(١) = ٢ فالنقطة (-١، .....)
تنتمى الى منحنى الدالة

(٥) اذا كانت د دالة زوجية وكان د(١) = ٢ فانه النقطة
(-١ ، .....) تنتمى الى منحنى الدالة

الحل

(١) ٢ د(٢) = ٢ د(-٢) (٢) صفر

(٣) ب = - أ

(٤) ∵ د فردية ∴ د(-١) = - د(١) = -٢ ∴ النقطة (-١، -٢)

(٥) ∵ د زوجية ∴ د(-١) = د(١) = ٢ ∴ النقطة (-١، ٢)

الدوال الأحادية

الدالة د : س ← ص تسمى دالة احادية اذا كان لكل أ ، ب ∈ المجال س بحيث د(أ) = د(ب) فإن أ = ب
اى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الاحادية لهما نفس الصورة
اى عندما ترسم اى خط افقى لابد أن يقطع منحنى الدالة الاحادية فى نقطة واحدة فقط

مثال أثبت أن الدوال الاتية دوال أحادية :

(١) د(س) = ٢س − ٥ (٢) د(س) = $\frac{٢س - ٣}{٣س + ٢}$

الحل

(١) ∵ د(س) = ٢س − ٥ وبفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة
فإن د(أ) = د(ب) ∴ ٢أ − ٥ = ٢ب − ٥
منها أ = ب ⟸ الدالة أحادية

(٢) ∵ د(س) = $\frac{٢س - ٣}{٣س + ٢}$ وبفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة
بحيث د(أ) = د(ب) ⟸ ∴ $\frac{٢أ - ٣}{٣أ + ٢} = \frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$

∴ ٦أب + ٤أ − ٩ب − ٦ = ٦أب − ٩أ + ٤ب − ٦
∴ ٤أ − ٩ب = −٩أ + ٤ب ⟸ ١٣أ = ١٣ب ⟸ أ = ب
∴ الدالة أحادية

ملاحظات هامة

(١) كل الدوال الزوجية ليست أحادية

Scanned by CamScanner

(٢) اذا وجد عنصران في مجال الدالة لهما نفس الصورة كانت الدالة ليست أحادية مثلاً اذا كان (ا ، ص) ، (ب ، ص) تقعان على منحنى الدالة د فإنه الدالة د ليست احادية لانه العنصران ا ، ب لهما نفس الصورة

مثال

ابحث نوع الدوال الاتية من حيث كونها أحادية أم لا

(١) د(س) = ٢ س^2 − ١ (٢) د(س) = س^2 + س

الحل

(١) ∵ د(س) = ٢ س^2 − ١ ونفرض أن ا ، ب ∈ مجال الدالة بحيث د(ا) = د(ب) ∴ ٢ ا^2 − ١ = ٢ ب^2 − ١

∴ ا^2 = ب^2 منها ا = ± ب ⟸ ∴ الدالة ليست أحادية

(٢) ∵ د(س) = س^2 + س ونفرض أن ا ، ب ∈ مجال الدالة بحيث د(ا) = د(ب) ∴ ا^2 + ا = ب^2 + ب

∴ ا^2 − ب^2 = ب − ا ∴ (ا − ب)(ا + ب) − (ب − ا) = ٠

∴ (ا − ب) [ا + ب + ١] = ٠ منها ا = ب

ا = − ب − ١

∴ الدالة ليست أحادية

مثال

بين نوع الدوال الاتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو أحادية أو غير ذلك

(١) د(س) = س + ٢

(٢) د : ح ⟵ ح$^+$ حيث د(س) = س^2

(٣) د : ح$^+$ ⟵ ح$^+$ حيث د(س) = ٣ س^2

(٤) د : [−٣ ، ٣] ⟵ ح حيث د(س) = س^2

الحل

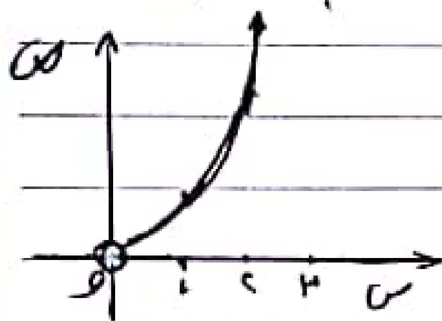
(١) ∵ $د(س) = س + ٢$ مجالها = ح وهى دالة كثيرة

∴ $د(-س) = -س + ٢ = -[س - ٢] \neq - د(س)$

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها احادية

(٢) ∵ $د : ص^+ \longrightarrow ص$ حيث $د(س) = س^٢$

الدالة مجالها $ص^+$ ← ∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية



ومن الرسم البيانى نجد أن الدالة احادية

(٣) يترك للطالب

(٤) يترك للطالب

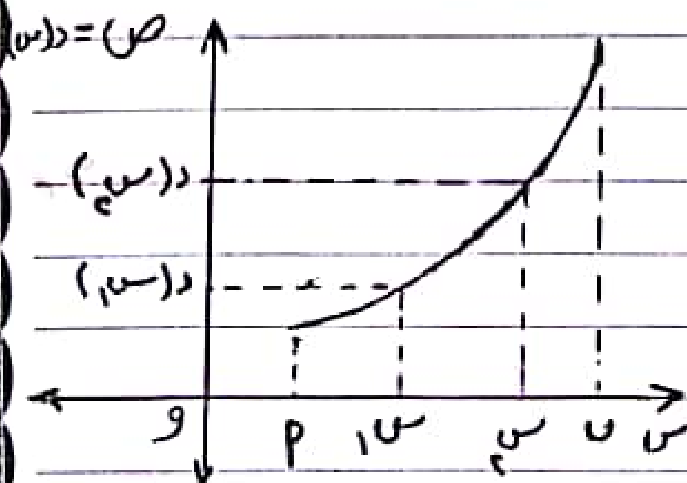
اطراد الدوال

يقصد ببحث اطراد دالة ما هو تحديد الفترات من مجالها التى تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التى تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التى تكون فيها الدالة ثابتة

(١) تزايد الدالة :-

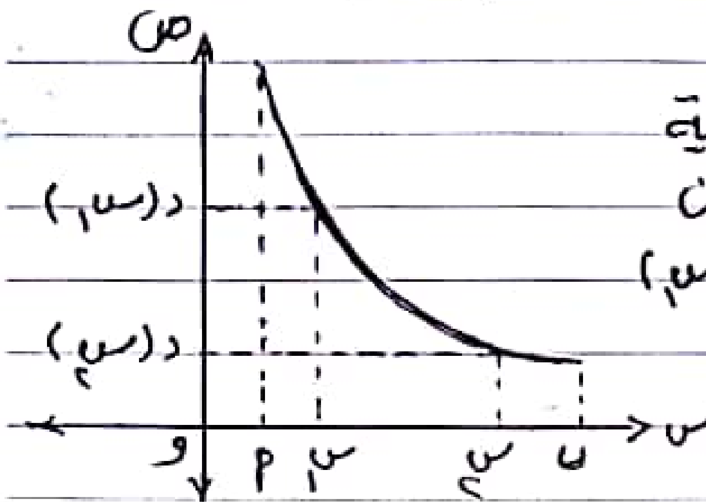
يقال أن الدالة د تزايديه فى الفترة $]أ، ب[$ اذا كان لكل

$س_٢ > س_١ \Longrightarrow د(س_٢) > د(س_١)$



لكل $س_١، س_٢ \in]أ، ب[$

(٢) تناقص الدالة :-

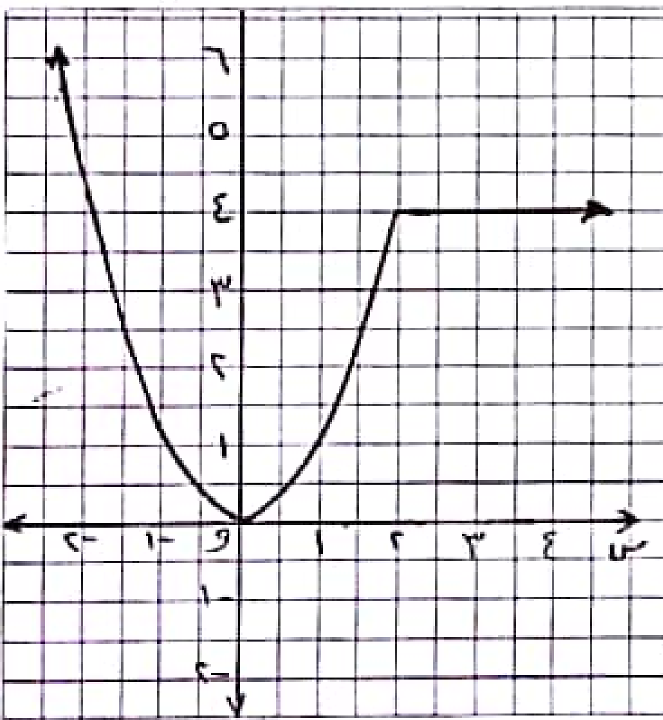


يقال أن الدالة د تناقصية في الفترة]أ ، ب[اذا كان لكل س٢ > س١ ⟸ د(س٢) < د(س١)

لكل س١ ، س٢ ∈]أ ، ب[

(٣) ثبوت الدالة :- يقال أن الدالة د ثابتة في الفترة]أ ، ب[اذا كان س٢ > س١ ⟸ د(س٢) = د(س١)

اى أن منحنى الدالة يوازى محور السينات في هذه الفترة



مثال في الشكل المقابل ابحث اطراد الدالة :-

الحل

∵ مجال الدالة = ح

الدالة تناقصية على الفترة]-∞ ، ٠[وتزايدية في الفترة]٠ ، ٢[وثابتة في الفترة]٢ ، ∞[

* ملاحظة هامة :-

اذا كانت الدالة في تزايد مستمر أو في تناقص مستمر على مجالها يقال أن الدالة احادية

التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

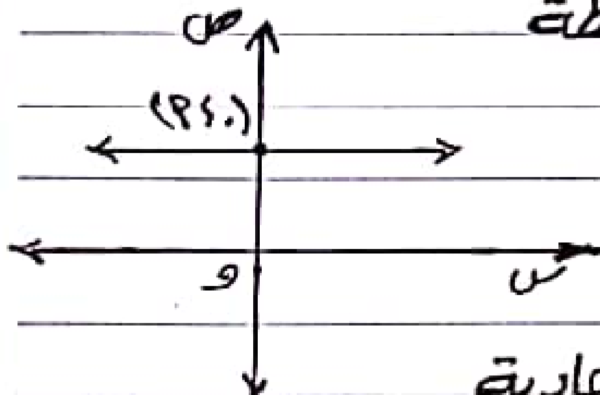
(١) الدالة الثابتة :.

الصورة الأساسية د : ح ← ح ، د(س) = م حيث م ∈ ح

يمثلها بيانياً خط مستقيم يوازي محور السينات

ويقطع محور الصادات في النقطة

(٠، م)



مجال الدالة = ح

مدى الدالة = {م}

الدالة زوجية

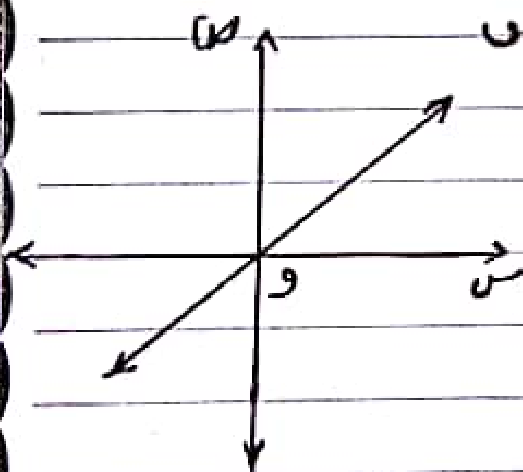
الدالة ثابتة والدالة ليست أحادية

(٢) الدالة الخطية :.

الصورة الأساسية د(س) = س

يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر

بنقطة الأصل وميله = ١



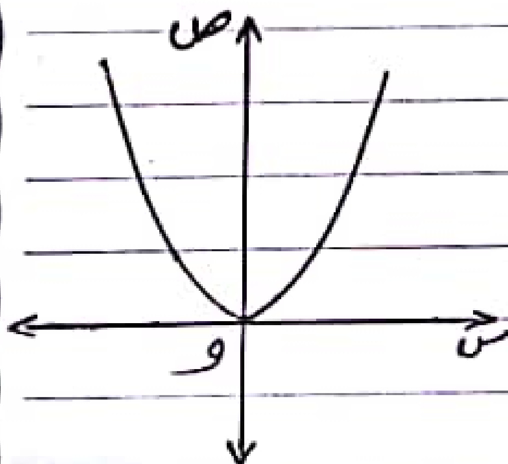
مجال الدالة = ح

مدى الدالة = ح

الدالة فردية - الدالة تزايدية

على مجالها - الدالة أحادية

(٣) الدالة التربيعية :-



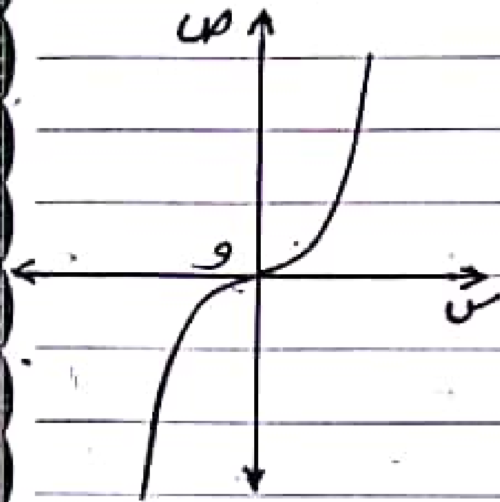
الصورة الأساسية د(س) = س²

مجالها = ح ومداها = [٠، ∞[

الدالة زوجية - الدالة تزايدية

على]٠، ∞[وتناقصية على]-∞، ٠[

الدالة ليست أحادية



(٤) الدالة التكعيبية :-

الصورة الاساسية د(س) = $س^٣$

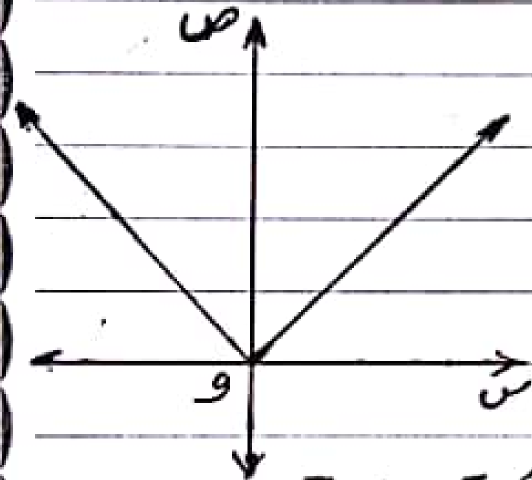
مجالها = ح ومداها = ح

الدالة فردية - الدالة تزايدية

فى]-∞، ٠[وتزايدية على]٠، ∞[

الدالة تزايديه على مجالها

الدالة احادية



(٥) دالة المقياس :-

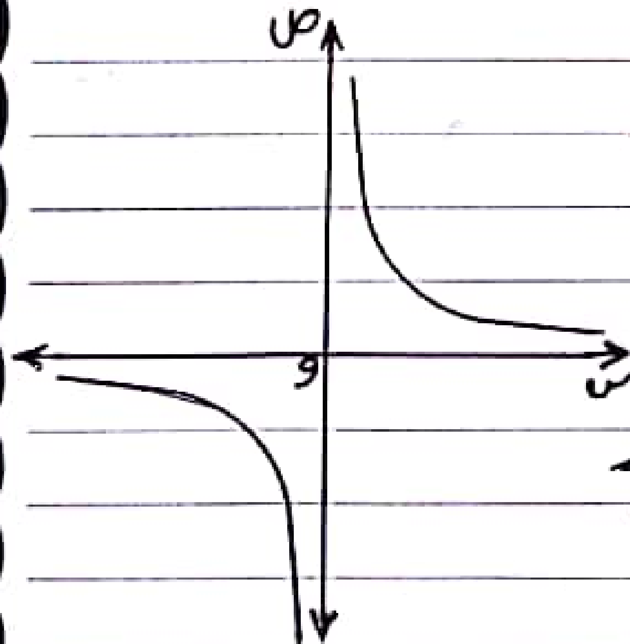
الصورة الاساسية د(س) = |س|

∴ د(س) = { س عندما س ≥ ٠ ، -س عندما س < ٠ }

مجال الدالة = ح ومداها = [٠، ∞[

الدالة زوجية - الدالة تناقصية فى]-∞، ٠[

وتزايدية فى]٠، ∞[- الدالة ليست احادية



(٦) الدالة الكسرية :-

الصورة الاساسية د(س) = $\frac{١}{س}$

مجالها = ح - {٠}

مداها = ح - {٠}

الدالة فردية

الدالة تناقصية فى]-∞، ٠[

وتناقصية فى]٠، ∞[ايضاً

الدالة احادية

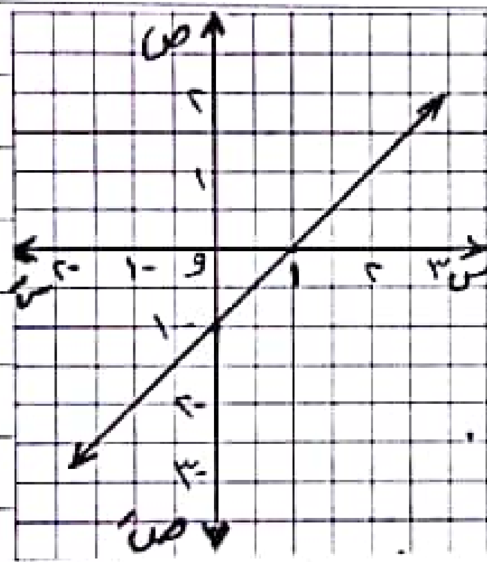
التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

(١) الدالة الخطية :-

الصورة العامة د(س) = أ س + ب

مثال استخدم منحنى الدالة د(س) = س لرسم منحنى الدالة ر(س) = س − ١ ثم ادرس هذه الدالة

الحل



منحنى الدالة ر(س) = س − ١
هو نفس منحنى الدالة د(س) = س
بإزاحة رأسية مقدارها
وحدة واحدة في اتجاه وص←
مجال الدالة = ح وسداها = ح
الدالة تزايدية على مجالها
الدالة ليست زوجية وليست فردية
الدالة العادية

(٢) الدالة التربيعيه :-

الصورة العامة هي د(س) = أ(س + ب)^2 + حـ

(١) اذا كانت أ > ١ فانه منحنى الدالة د(س) هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة ر(س) = س^2

(٢) اذا كانت ٠ < أ < ١ فان منحنى الدالة د(س) هو انكماش رأسي لمنحنى الدالة ر(س) = س^2

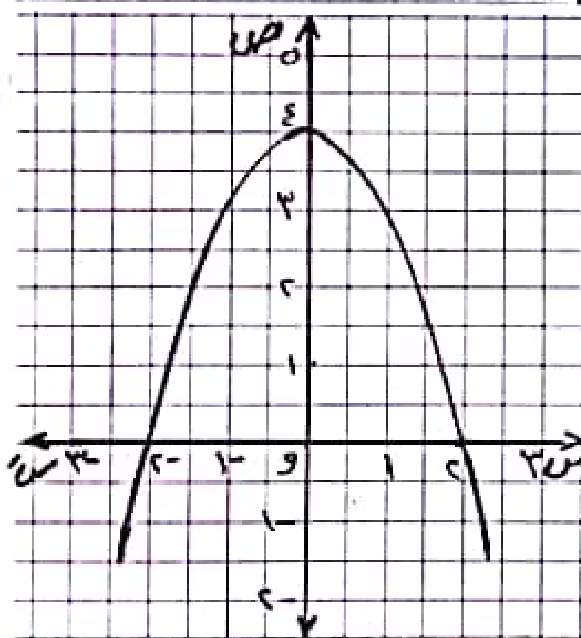
(٣) اذا كانت أ < ٠ فانه منحنى الدالة د(س) هو انعكاس لمنحنى الدالة ر(س) = س^2 في محور السينات

(٤) نقطة رأس المنحنى = (- ب ، جـ) حيث
الاحداثى السينى لنقطة راس المنحنى يمثل الازاحة الافقية لمنحنى الدالة بينما الاحداثى الصادى يمثل الازاحة الرأسية

* يكون ترتيب التحويلات الهندسية كالتالى تمدد - انعكاس - ازاحة افقية - ازاحة رأسية

مثال
استخدم منحنى الدالة د(س) = س^٢ فى رسم منحنى الدالة ر(س) = - س^٢ + ٤ ثم ادرس الدالة

الحل

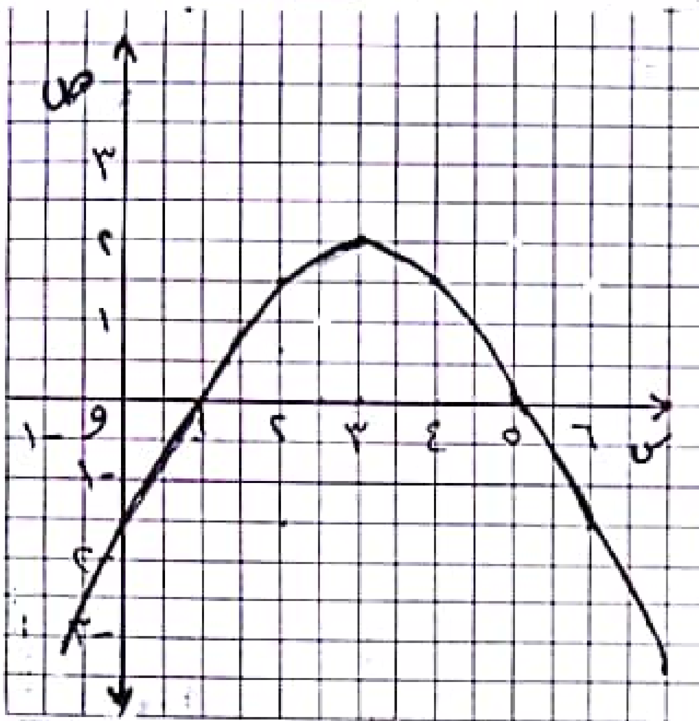


∵ ر(س) = -(س - ٠)^٢ + ٤
∴ أ = -١ ، ب = ٠ ، جـ = ٤
∴ نقطة رأس المنحنى = (٠ ، ٤)
∴ منحنى الدالة ر(س) = -س^٢ + ٤
هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) = س^٢
يتبعه ازاحة رأسية مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه وص
مجال الدالة = ح
مدى الدالة =]-∞ ، ٤]
الدالة زوجية وليست احادية والدالة تزايدية فى الفترة]-∞ ، ٠[وتناقصية فى الفترة]٠ ، ∞[

مثال
استخدم منحنى الدالة د(س) = س^٢ فى رسم منحنى الدالة ر(س) = ٢ - ½ (س - ٣)^٢ ثم ادرس هذه الدالة

الحل

Scanned by CamScanner



∵ د(س) = ٢ - $\frac{١}{٢}$ (س - ٣)²

∴ أ = - $\frac{١}{٢}$ ، ب = -٣ ، هـ = ٢

∴ نقطة رأس المنحنى = (٣ ، ٢)

∴ منحنى الدالة د(س) هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) = س² يتبعه انعكاس في محور السينات يتبعه ازاحة أفقية مقدارها ٣ وحدات في اتجاه وس→ ثم ازاحة رأسية مقدارها ٢ وحدة في اتجاه وص↑

مجال الدالة = ح ومداها =]-∞ ، ٢] - الدالة ليست زوجية وليست فردية وليست احادية - الدالة تزايدية في]-∞ ، ٣[وتناقصية في الفترة]٣ ، ∞[

مثال

بدون رسم منحنى الدالة د(س) اذكر التحويلات الهندسية التي طرأت عليها اذا كان

(١) د(س) = س² + ٤س + ١   (٢) د(س) = (٢س - ٣)² - ١

الحل

(١) ∵ د(س) = س² + ٤س + ١ ∴ أ = ١ ب = ٤ هـ = ١

∴ س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٤}{٢}$ = -٢   ص = (-٢)² + ٤ × -٢ + ١ = -٣

∴ نقطة رأس المنحنى = (-٢ ، -٣)

∴ منحنى الدالة د(س) هو نفس منحنى الدالة د(س) = س² بازاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في اتجاه وس← ثم ازاحة رأسية قدرها ٣ في اتجاه وص↓

مجال الدالة = ح ومداها = [-٣ ، ∞[الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٢) يترك للطالب

(٣) الدالة التكعيبية :-

الصورة العامة $ر(س) = أ(س + ب)^{٣} + جـ$

نقطة تماثل المنحنى = (-ب ، جـ)

* كما في الدالة التربيعية من أ نحدد الانعكاس والتمدد والانكماش ومن نقطة تماثل المنحنى نحصل على الإزاحة الأفقية والرأسية

مثال

استخدم منحنى الدالة $د(س) = س^{٣}$ في رسم منحنى الدالة $ر(س) = (س - ١)^{٣} - ٢$ ثم ادرس الدالة

الحل

∵ $ر(س) = (س - ١)^{٣} - ٢$

∴ أ = ١ ، ب = -١ ، جـ = -٢

∴ نقطة تماثل المنحنى = (١ ، -٢)

∴ منحنى الدالة ر(س) هو نفس منحنى الدالة $د(س) = س^{٣}$ بإزاحة أفقية مقدارها ١ وحدة في اتجاه س→ يتبعها إزاحة رأسية مقدارها ٢ وحدة في اتجاه ص↓

مجال الدالة = ح ومداها = ح

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها دالة أحادية

الدالة تزايدية على مجالها

* تدريب :-

استخدم منحنى الدالة $د(س) = س^{٣}$ في رسم منحنى الدالة $ر(س) = -٢(س - ٢)^{٣} + ١$ ثم ادرس هذه الدالة

(٤) الدالة الكسرية :-

الصورة العامة للدالة الكسرية د(س) = $\frac{أ}{س + ب}$ + حـ

مجالها = ح - {-ب}

مداها = ح - {حـ} ، نقطة تماثل المنحنى = (-ب ، حـ)

* كما في الدالة التربيعية من أ نحدد الانعكاس والتمدد والانكماش ومن نقطة تماثل المنحنى نحدد الإزاحة الأفقية والرأسية

مثال

استخدم منحنى الدالة د(س) = $\frac{1}{س}$ في رسم منحنى الدالة ر(س) = $\frac{-1}{س + 1}$ ثم ادرس الدالة

الحل

∵ ر(س) = $\frac{-1}{س + 1}$

∴ أ = -١ ب = ١ حـ = صفر

∴ نقطة تماثل المنحنى = (-١ ، ٠)

∴ منحنى الدالة ر(س) هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) = $\frac{1}{س}$ يتبعه ازاحة أفقية مقدارها ١ وحدة في اتجاه و س←

مجال الدالة = ح - {-١}

مدى الدالة = ح - {٠}

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها أحادية

الدالة تزايدية على الفترة]-∞ ، -١[،]-١ ، ∞[

مثال

استخدم منحنى الدالة د(س) = $\frac{1}{س}$ في رسم منحنى الدالة ر(س) = $\frac{٣س - ٥}{س - ٢}$ ثم ادرس الدالة

الحل

∵ $د(س) = \frac{٣س - ٥}{س - ٢}$ ليست على الصورة العامة

بإجراء القسمة المطولة

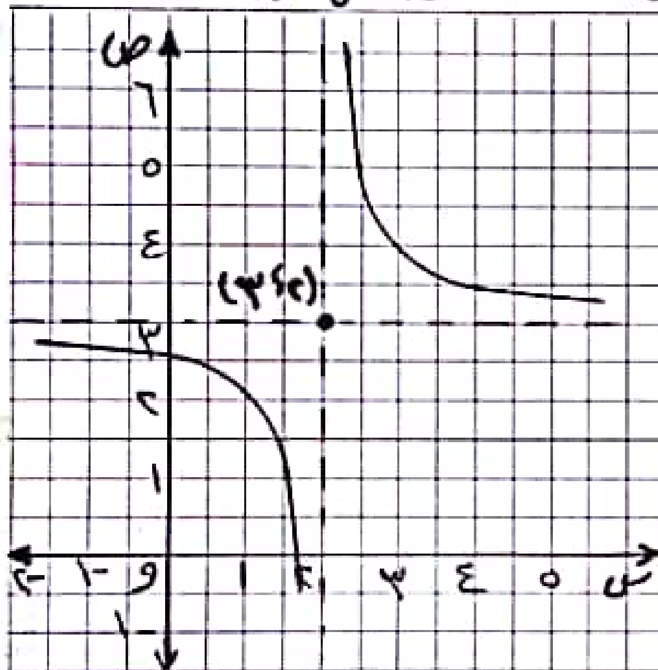
$$\begin{array}{r|l} ٣ & \\ ٣س - ٥ & س - ٢ \\ ٣س - ٦ & \\ \hline ٠ + ١ & \end{array}$$

∴ $د(س) = ٣ + \frac{١}{س - ٢}$

∴ أ = ١ ، ب = -٢ ، حـ = ٣

∴ منحنى الدالة د(س) هو نفس منحنى الدالة $د(س) = \frac{١}{س}$ بإزاحة أفقية قدرها ٢ في اتجاه $\overrightarrow{و س}$ يتبعها إزاحة رأسية قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overrightarrow{و ص}$

⇐ نقطة تماثل المنحنى = (٢ ، ٣)



مجال الدالة = ح - {٢}

مدى الدالة = ح - {٣}

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها دالة أحادية

الدالة تناقصية على الفترتين]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

(٥) دالة المقياس :-

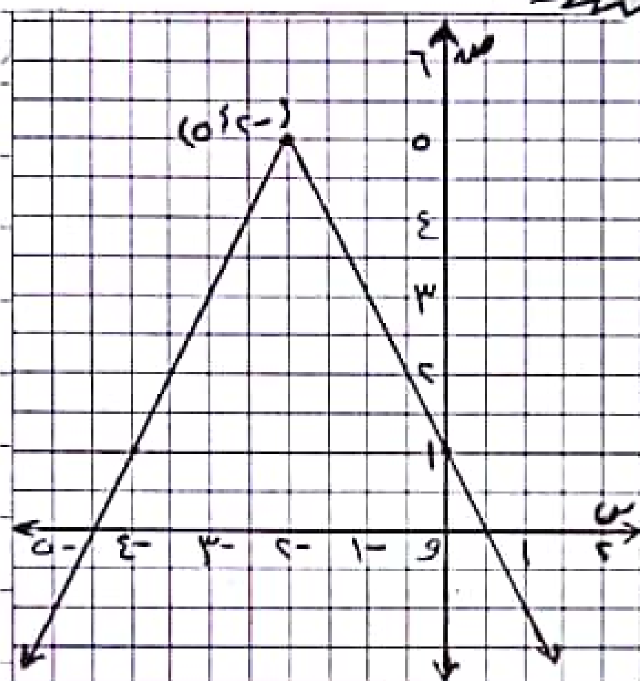
الصورة العامة هي $د(س) = أ|س + ب| + حـ$

مجالها = ح ونقطة رأس المنحنى = (-ب ، حـ)

* كما في الدالة التربيعية مع أ تحدد الانعكاس والتمدد والانكماش الرأسي ونقطة رأس المنحنى تحدد الإزاحة الأفقية والرأسية

مثال استخدم منحنى الدالة د(س) = |س| في رسم منحنى الدالة ر(س) = ٥ - ٢|س + ٢| ثم ادرس الدالة

الحل



∵ ر(س) = ٥ - ٢|س + ٢|

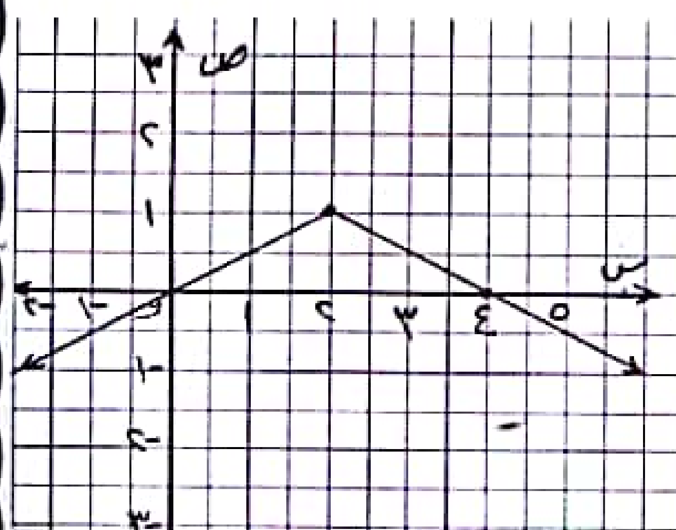
∴ م = -٢ ، ب = ٢ ، ك = ٥

∴ نقطة رأس المنحنى = (-٢، ٥)

∴ منحنى الدالة ر(س) هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة د(س) = |س| يتبعه انعكاس في محور السينات يتبعه ثم ازاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في اتجاه و س← ثم ازاحة رأسية قدرها ٥ وحدات في اتجاه و ص→

مجال الدالة = ح ومداها =]-∞، ٥] الدالة ليست زوجية أو فردية أو أحادية ، الدالة تزايدية في الفترة]-∞، -٢[وتناقصية في الفترة]-٢، ∞[

مثال استخدم منحنى الدالة د(س) = |س| في رسم منحنى الدالة ر(س) = ١ - |½س - ١|



∴ ر(س) = ١ - |½(س - ٢)|

∴ ر(س) = ١ - ½|س - ٢|

∴ م = ½ ، ب = -٢ ، ك = ١

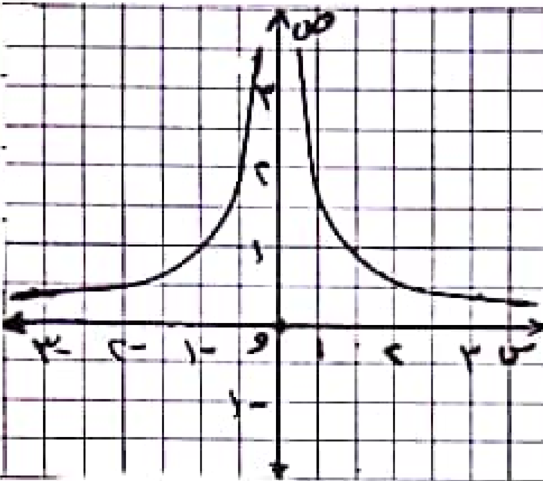
نقطة رأس المنحنى = (٢، ١)

* دراسة الدالة يترك للطالب

مثال اذا كانت $د(س) = \frac{1}{س}$ ارسم الشكل البياني للدالة ر(س) اذا كانت

(١) ر(س) = | د(س) | (٢) ر(س) = | د(س+١) | - ٢

الحل



(١) ∵ ر(س) = | د(س) |

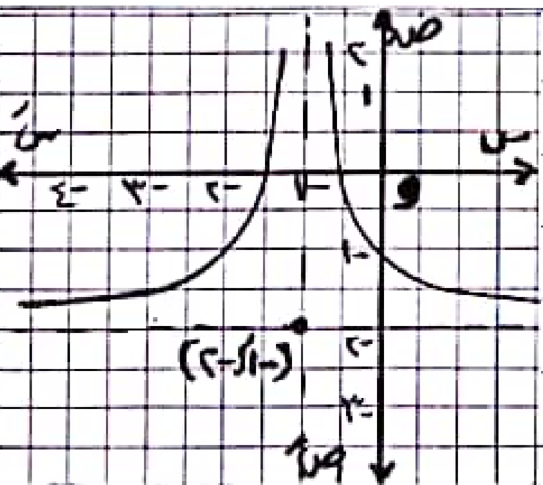
∴ $ر(س) = |\frac{1}{س}| = \frac{1}{|س|}$

∴ ر(س) = { $\frac{1}{س}$ عندما س > ٠ ، $\frac{-1}{س}$ عندما س < ٠ }

مجال الدالة = ح - {٠}

مدى الدالة =]٠ ، ∞[

الدالة زوجية - الدالة ليست اطارية - الدالة تزايدية فى الفترة]-∞ ، ٠[وتناقصية فى الفترة]٠ ، ∞[



(٢) ∵ ر(س) = | د(س+١) | - ٢

∴ $ر(س) = |\frac{1}{س+1}| - 2 = \frac{1}{|س+1|} - 2$

∴ ر(س) = { $\frac{1}{س+1} - 2$ س > -١ ، $\frac{-1}{س+1} - 2$ س < -١ }

∴ مجال الدالة = ح - {-١}

مدى الدالة =]-٢ ، ∞[

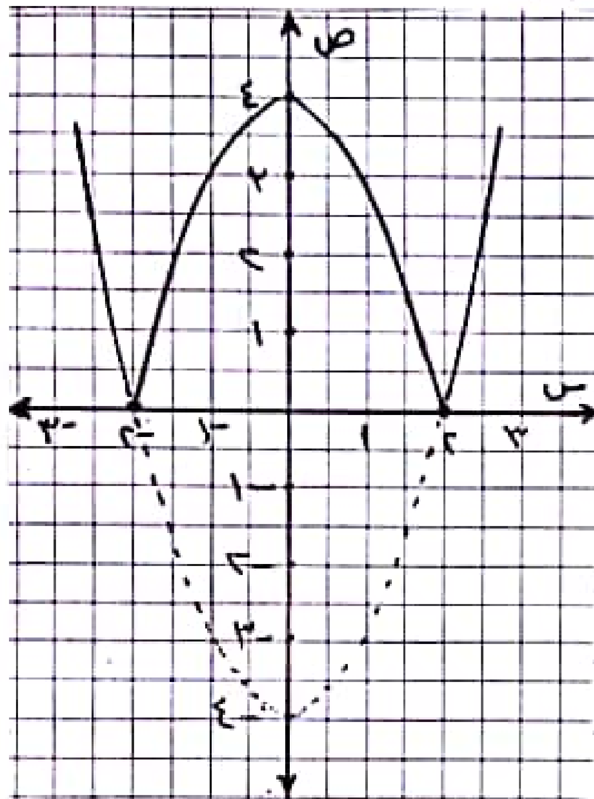
الدالة ليست زوجية وليست فردية وليست اطارية

الدالة تزايدية فى الفترة]-∞ ، -١[وتناقصية فى الفترة]-١ ، ∞[

مثال ٤ ارسم منحنى الدوال الآتية

(١) $د(س) = |٤ - س^٢|$ (٢) $د(س) = |س^٢ - ٢س - ٣|$ حيث $س \in [-١ ، ٤]$

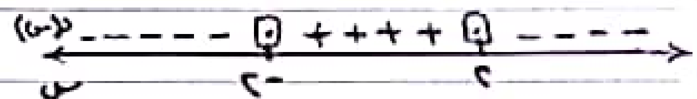




(١) ∵ $د(س) = |٤ - س^٢|$

نقوم ببحث اشارة المقدار $٤ - س^٢$

وذلك بوضع $٤ - س^٢ = ٠$ ∴ $س = \pm ٢$



∴ $د(س) = \begin{cases} ٤ - س^٢ & \text{عندما } س \in [-٢ ، ٢] \\ س^٢ - ٤ & \text{عندما } س \in ح - [-٢ ، ٢] \end{cases}$

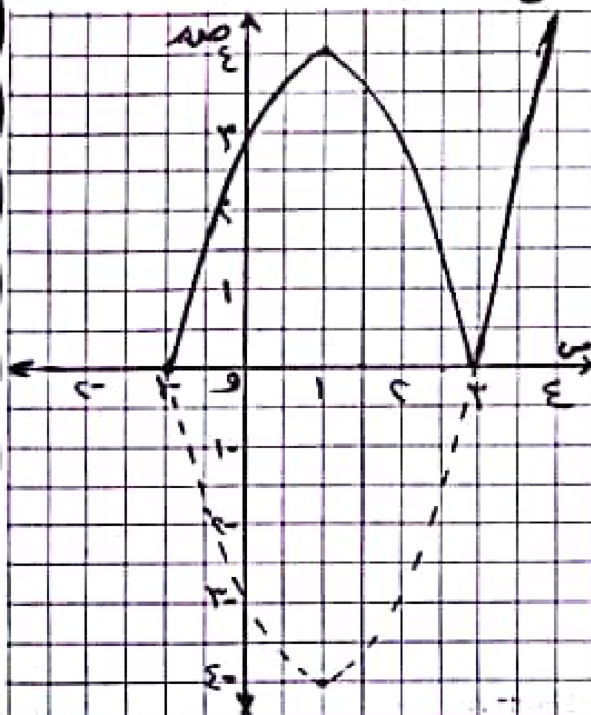
∴ مجال الدالة = ح

مدى الدالة = $[٠ ، \infty[$

الدالة زوجية وليست احادية

الدالة تناقصية فى الفترتين $]-\infty ، -٢[$ ، $[٠ ، ٢[$

الدالة تزايدية فى الفترتين $]-٢ ، ٠[$ ، $[٢ ، \infty[$



(٢) ∵ $د(س) = |س^٢ - ٢س - ٣|$ لكل $س \in [-١ ، ٤]$

بوضع $س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$ ⇐ $س = -١$ ، $س = ٣$



∴ $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س - ٣ & \text{لكل } س \in [٣ ، \infty[\\ \text{صفر} & \text{عندما } س = -١ \\ ٣ + ٢س - س^٢ & \text{لكل } س \in]-١ ، ٣[\end{cases}$

دراسة الدالة متروك للطالب

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

اولاً حل معادلات القيمة المطلقة :-

* خواص مقياس العدد :-

(١) |أ| ≥ ٠

(٢) |أ ب| = |أ| × |ب| مثلا |٥ × -٢| = |٥| × |-٢| = ٥ × ٢ = ١٠

(٣) |أ + ب| ≤ |أ| + |ب|

مثلا |٢ + (-٣)| = |-١| = ١

بينما |٢| + |-٣| = ٢ + ٣ = ٥

* ملاحظات هامة :-

لأي عدد حقيقي أ ، س متغير

(١) |أ| = |-أ| مثلا |٢| = |-٢| = ٢

(٢) |س - أ| = |أ - س|

مثلا |س - ١| = |١ - س| اي يمكن التعويض باحدهما عن الآخر

(٣) اذا كان |س| = ح فانه ح > ٠ ، س = ح أو س = -ح

مثلا |س| = ٧ فان س = ٧ أو س = -٧ ∴ س = ±٧

(٤) لأي عددين حقيقيين أ ، ب اذا كان |أ| = |ب| فان أ = ± ب

(٥) (|أ|)² = أ² (مربع مقياس عدد = مربع هذا العدد)

مثلا (|٢|)² = (٢)² = ٤

(٦) √أ² = |أ| (الجذر التربيعي لمربع عدد = مقياس هذا العدد)

مثلا √(-٢)² = |-٢| = ٢

(٧) |س - أ| =
- س - أ عندما س ≥ أ
- -س + أ عندما س < أ

(٨) الحل الجبرى لمعادلات القيمة المطلقة هو ايجاد قيمة المتغير باستخدام خواص مقياس العدد

(٩) الحل البيانى لمعادلات القيمة المطلقة هو ايجاد قيمة المتغير وذلك عن طريق رسم الدالتين بيانياً والحل البيانى يكون الاحداثى السينى لنقط تقاطع المنحنيين

مثال

أوجد مجموعة حل المعادلات الاتية

(١) |س − ٢| = ٢ (٢) |س + ٢| = ٣س − ١٠

(٣) |س + ٢| + ١ = س (٤) س² − ٣|س| = ٠

الحل

(١) ∵ |س − ٢| = ٢ ∴ ٢ = { س − ٢ عندما س ≥ ٢ ، −س + ٢ عندما س < ٢

∴ ٢ = س − ٢ عندما س ≥ ٢ ‖ ٢ = −س + ٢ عندما س < ٢

∴ س = ٤ ✓ ‖ ∴ س = ٠ ✓

∴ م.ح = {٠ ، ٤}

(٢) ∵ |س + ٢| = ٣س − ١٠

∴ ٣س − ١٠ = { س + ٢ عندما س ≥ −٢ ، −س − ٢ عندما س < −٢

∴ ٣س − ١٠ = س + ٢ عندما س ≥ −٢ ‖ ∴ ٣س − ١٠ = −س − ٢ عندما س < −٢

∴ ٢س = ١٢ ومنها س = ٦ ✓ ‖ ∴ ٤س = ٨ ومنها س = ٢ مرفوض

∴ م.ح = {٦}

(٣) ∵ |س + ٢| + ١ = س ⇐ س − ١ ∴ س − ١ = { س + ٢ لكل س ≥ −٢ ، −س − ٢ لكل س < −٢

∴ $س - ١ = س + ٢$ عندما $س \geq -٢$ | ∴ $س - ١ = -س - ٢$ عندما $س < -٢$

∴ $-١ = ٢$ مرفوض | ∴ $٢س = -١$ منها $س = -\frac{١}{٢}$ مرفوض

∴ م.ح $= \emptyset$

(٤) ∵ $س^٢ - ٣|س| = ٠$ ⇐ $س^٢ = ٣|س|$

∴ $س^٢ = \begin{cases} ٣س & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -٣س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

∴ $س^٢ = ٣س$ عندما $س \geq ٠$ | ∴ $س^٢ = -٣س$ عندما $س < ٠$

$س^٢ - ٣س = ٠$ | ∴ $س^٢ + ٣س = ٠$

$س(س - ٣) = ٠$ منها | $س(س + ٣) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٣$ ✓ | $س = ٠$ مرفوض ، $س = -٣$ ✓

∴ م.ح $= \{٠ ، ٣ ، -٣\}$

مثال

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية

(١) $|س + ٥| = |س - ٣|$ (٢) $|س - ١| - ٢|٢ - س| = ٠$

(٣) $|س - ٣|^٢ - |٣ - س| = ٠$ (٤) $\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤} = ٤$

الحل

(١) ∵ $|س + ٥| = |س - ٣|$ ⇐ ∴ $س + ٥ = \pm(س - ٣)$

∴ $س + ٥ = س - ٣$ | $س + ٥ = -س + ٣$

∴ $٥ = -٣$ مرفوض | ∴ $٢س = -٢$ منها $س = -١$

∴ م.ح $= \{-١\}$

(٢) ∵ $|س - ١| - ٢|٢ - س| = ٠$ ⇐ ∴ $|س - ١| = ٢|س - ٢|$

∴ $س - ١ = \pm ٢(س - ٢)$

∴ س − ١ = ٢س − ٤ س − ١ = −٢س + ٤

∴ −١ = س − ٤ ∴ س = ٣ ∴ ٣س = ٥ ومنها س = $\frac{٥}{٣}$

∴ م.ح = {٣ ، $\frac{٥}{٣}$}

(٣) ∵ |س − ٣|^{٢} − |س − ٣| = ٠ ∴ |س − ٣|^{٢} − |س − ٣| = ٠

∴ |س − ٣| (|س − ٣| − ١) = ٠

∴ إما |س − ٣| = ٠ ومنها س = ٣ ← ①

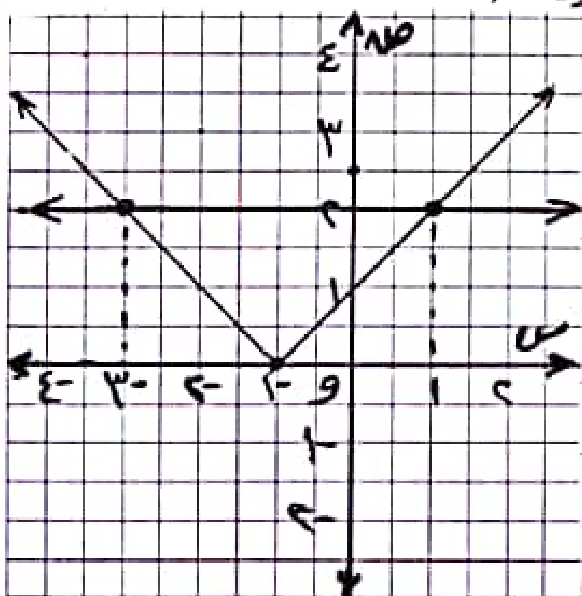
أو |س − ٣| − ١ = ٠ ∴ |س − ٣| = ١ ∴ س − ٣ = ±١

∴ س = ٤ ، س = ٢

∴ م.ح = {٣ ، ٤ ، ٢}

مثال إذا كان د(س) = |س + ١| + ١ أوجد بيانياً مجموعة حل المعادلة د(س) = ٣

الحل



∵ د(س) = |س + ١| + ١ = ٣

∴ |س + ١| = ٢

لحل هذه المعادلة بيانياً

نقوم برسم الدالة ر(س) = |س + ١|

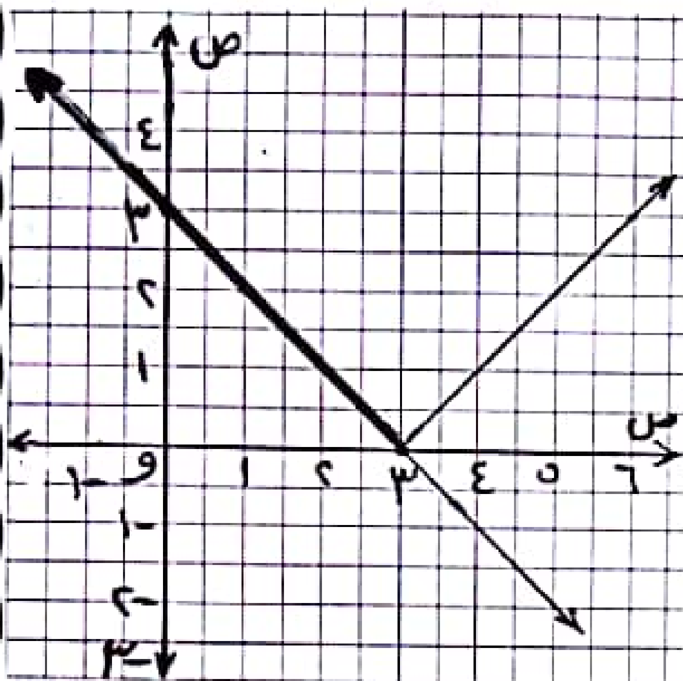
ونقوم برسم الدالة ه(س) = ٢

الإحداثي السيني لنقط تقاطع المنحنيين هو مجموعة حل المعادلة

∴ م.ح = {−٣ ، ١}

مثال أوجد بيانياً مجموعة حل المعادلة

|س − ٣| = ٣ − س



بفرض أن ر(س) = |س - ٣|

، ه(س) = ٣ - س

وبرسم الدالتين وتحديد نقط تقاطع المنحنيين

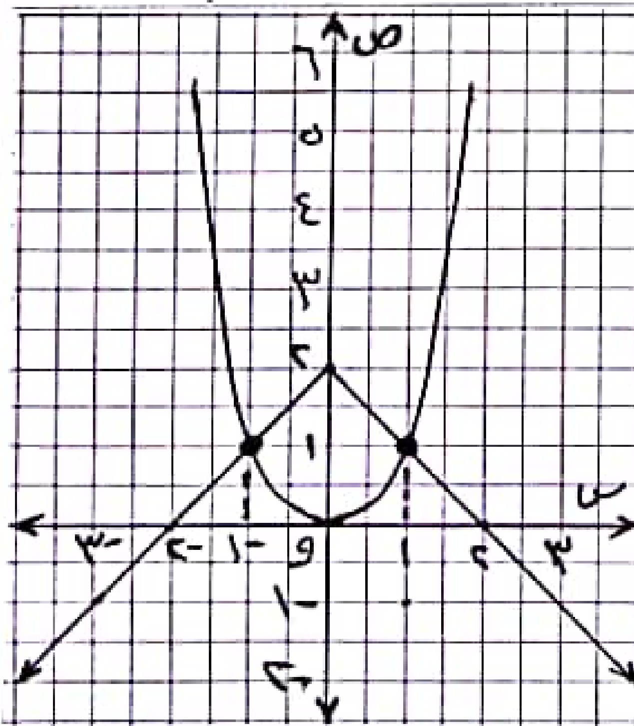
نجد أن :

المنحنيان متقاطعان معاً في الفترة]-∞، ٣]

∴ م.ح =]-∞، ٣]

مثال ارسم في شكل واحد الدالتين د ، ر حيث د(س) = س² |س| ، ر(س) = ٢ - |س| ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س)

الحل



∵ د(س) = س² |س|

∴ د(س) = { س³ عندما س ≥ ٠ ، -س³ عندما س < ٠

ر(س) = { ٢ - س عندما س ≥ ٠ ، ٢ + س عندما س < ٠

من الرسم البياني

م.ح = {-١، ١}

* ثانيا حل متباينات القيمة المطلقة :

نتائج هامة : لكل أ ∈ ح⁺

(١) إذا كان |س| < أ فإن -أ < س < أ

-∞ ، -أ ، أ ، ∞

∴ س ∈]-أ ، أ[

(٢) إذا كان |س| ≤ أ فإن -أ ≤ س ≤ أ

-∞ ، -أ ، أ ، ∞

∴ س ∈ [-أ ، أ]

(٣) إذا كانت |س| > أ فإن

س > أ ، س < -أ

-أ ، أ

∴ س ∈ ح - [-أ ، أ]

(٤) إذا كان |س| ≥ أ فإن

س ≥ أ ، س ≤ -أ

-أ ، أ

∴ س ∈ ح -]-أ ، أ[

مثال أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية في ح :

(١) |٢س - ٣| < ٥ (٢) |٣ - س| ≤ ٧

(٣) |٣ - ٢س| > ٥ (٤) |س - ٣| ≥ ٥

الحل

(١) ∵ |٢س - ٣| < ٥ ∴ -٥ < ٢س - ٣ < ٥

∴ -٢ < ٢س < ٨ ∴ -١ < س < ٤

∴ م.ح =]-١ ، ٤[

(٢) ∵ |٣ - س| ≤ ٧ ∴ -٧ ≤ ٣ - س ≤ ٧

∴ -١٠ ≤ -س ≤ ٤ ∴ ١٠ ≥ س ≥ -٤

∴ م.ح = [-٤ ، ١٠]

(٣) ∵ |٣ - ٢س| > ٥

∴ ٣ - ٢س < -٥ أو ٣ - ٢س > ٥

∴ -٢س < -٨ ، ∴ -٢س > ٢

∴ س > ٤ ، ∴ س < -١

∴ م.ح = ح - [-١ ، ٤]



(٤) ∵ |س - ٣| ≥ ٥

∴ س - ٣ ≤ -٥ أو س - ٣ ≥ ٥

∴ س ≤ -٢ ، ∴ س ≥ ٨

∴ م.ح = ح -]-٢ ، ٨[



مثال

أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية

(١) |(س - ٣)/٤| ≤ ١ (٢) |١/(٢س - ٥)| ≥ ٣

الحل

(١) ∵ |(س - ٣)/٤| ≤ ١ ∴ |س - ٣|/٤ ≤ ١

∴ |س - ٣| ≤ ٤ ∴ -٤ ≤ س - ٣ ≤ ٤

∴ -١ ≤ س ≤ ٧ ∴ م.ح = [-١ ، ٧]

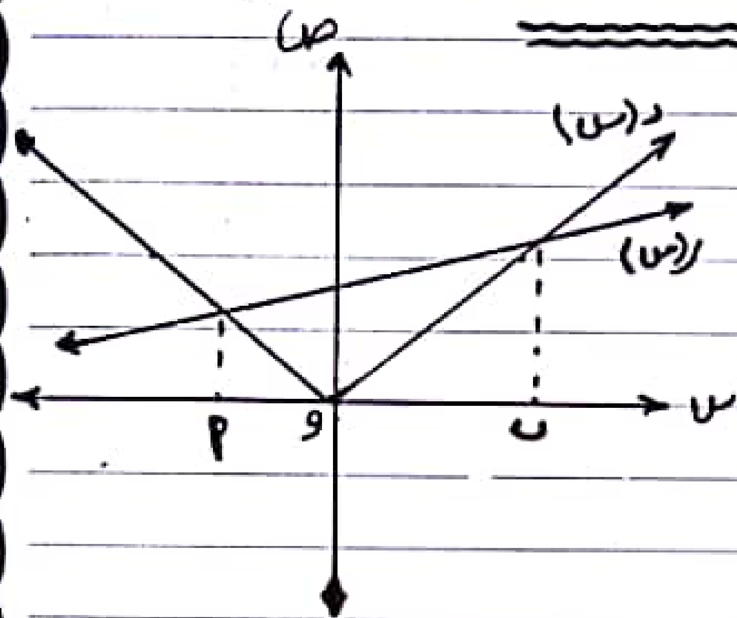
(٢) ∵ |١/(٢س - ٥)| ≥ ٣ ∴ ١/|٢س - ٥| ≥ ٣ ، س ≠ ٥/٢

∴ |٢س - ٥| ≤ ١/٣ ∴ -١/٣ ≤ ٢س - ٥ ≤ ١/٣ حيث س ≠ ٥/٢

∴ ١٤/٣ ≤ ٢س ≤ ١٦/٣ ∴ ٧/٣ ≤ س ≤ ٨/٣ حيث س ≠ ٥/٢

∴ م.ح = [٧/٣ ، ٨/٣] - {٥/٢}

* الحل البياني لمتباينات القيمة المطلقة :-



في الشكل المقابل لدى دالتين د ، ر يكون مجموعة حل المتباينة

(١) د(س) < ر(س) =]أ ، ب[

وهي مجموعة قيم س التي يكون عندها منحنى الدالة د أسفل منحنى الدالة ر

(٢) د(س) > ر(س) = ح - [أ ، ب]

وهي مجموعة قيم س التي يكون عندها منحنى الدالة د أعلى منحنى الدالة ر

* ملاحظات هامة :-

مجموعة حل المتباينة د(س) ≤ ر(س) = [أ ، ب]

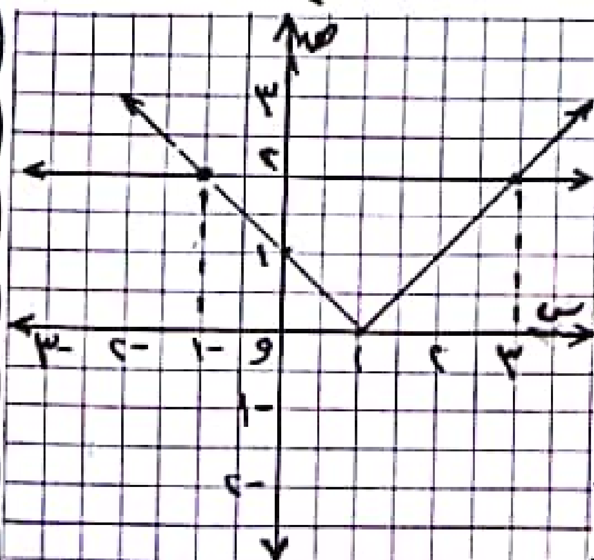
" " " د(س) ≥ ر(س) = ح -]أ ، ب[

مثال

أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات الآتية

(١) |س - ١| < ٢ (٢) |س - ١| ≥ ٢

الحل



بفرض أن د(س) = |س - ١|

ر(س) = ٢ وبرسم المنحنى لكل دالة ومن خلال الرسم نجد أن

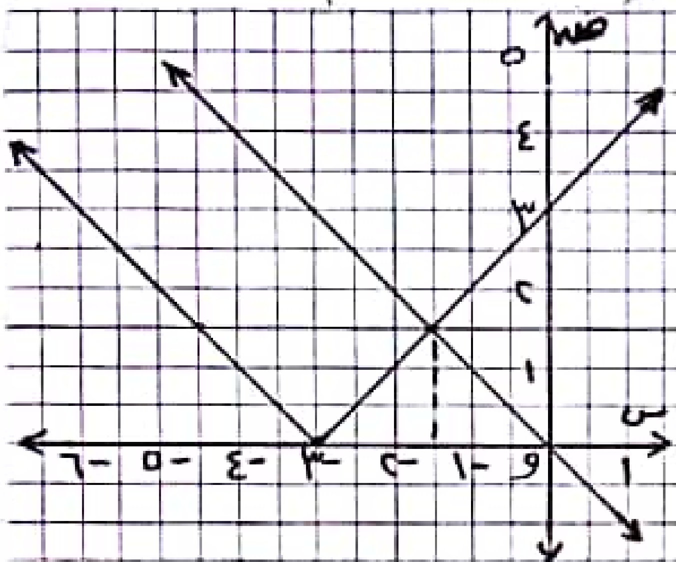
(١) مجموعة حل المتباينة |س - ١| < ٢ هي]-١ ، ٣[

(٢) مجموعة حل المتباينة |س - ١| ≥ ٢

هي ح -]-١ ، ٣[

مثال ١ أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينة |س+٣|+س > صفر

الحل



∵ |س+٣|+س > صفر

∴ |س+٣| > -س

بفرض أن د(س) = |س+٣|

ر(س) = -س

وبرسم منحنى الدالتين نجد

مجموعة حل المتباينة

|س+٣| + س > ٠

هي]$-\infty$، $-\frac{٣}{٢}$[

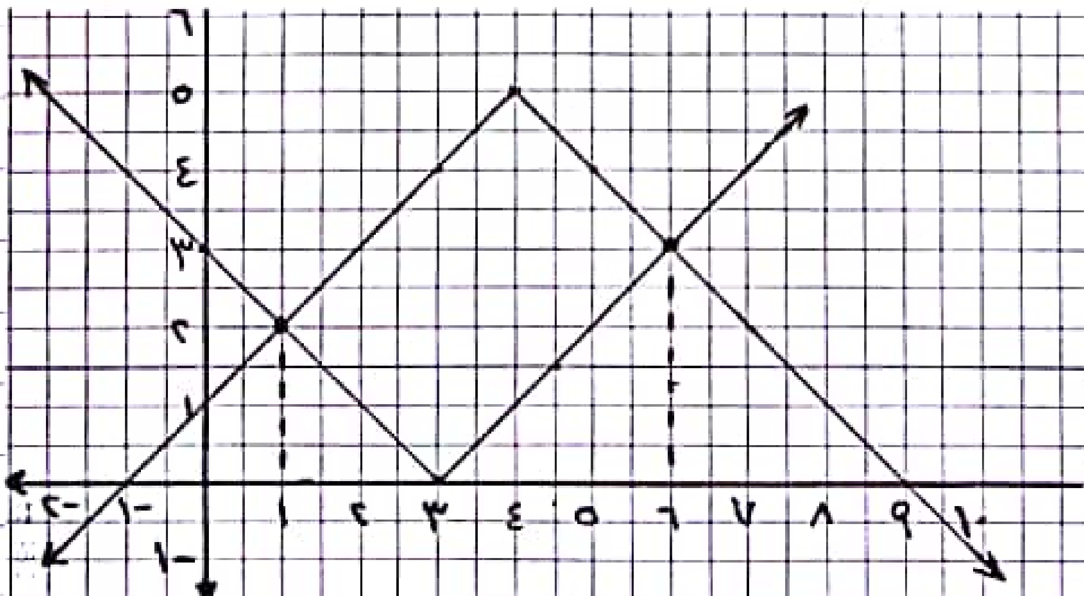
مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة

|س-٣|+|س-٤| > ٥

* نفرض أنه |س-٣| > ٥-|س-٤| ونفرض أن

د(س) = |س-٣| ، ر(س) = ٥-|س-٤| وبرسم الدالتين



ومن خلال الرسم نجد أن مجموعة الحل = ح-[١، ٦]

الوحدة الثانية

١- الاسس الكسرية
٢- الدالة الاسية
٣- المعادلات للاسية
٤- الدالة العكسية
٥- الدالة اللوغاريتمية
٦- بعض خواص اللوغاريتمات

الأسس الكسرية

* تذكر أن :-

لكل أ ، ب ∈ ح ، م ، ن ∈ ص فإن :

(١) $أ^{صفر} = ١$

(٢) $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ لكل أ ∈ ح - {٠} ، ن ∈ ص+

(٣) $أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{ن+م}$ (٤) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$ لكل أ ≠ ٠

(٤) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$ (٥) $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

(٦) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$ حيث ب ≠ صفر

مثال

اختصر لأبسط صورة

(١) $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}}$ (٢) $\frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن-١}}{٢ \times ٣^{٢ن+١} - ٣^{٢ن}}$

الحل

(١) المقدار $= \frac{(٣^{٣})^{-٣} \times (٣ \times ٤)^{٢}}{(٢)^{٤} \times (٣^{٤})^{-٢}} = \frac{٣^{-٩} \times ٣^{٢} \times ٢^{٤}}{٣^{-٨} \times ٢^{٤}}$

$= \frac{٣^{-٧}}{٣^{-٨}} = (٣)^{-٧+٨} = ٣$

(٢) المقدار $= \frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن} \times ٣^{-١}}{٢ \times ٣^{٢ن} \times ٣ - ٣^{٢ن}}$ بإخراج $٣^{٢ن}$ عامل مشترك

∴ المقدار $= \frac{٣^{٢ن}(٥ - ٤ \times ٣^{-١})}{٣^{٢ن}(٦ - ١)} = \frac{٥ - \frac{٤}{٣}}{٥}$

بالضرب × ٣ بسطاً ومقاماً ∴ المقدار $= \frac{١٥ - ٤}{١٥} = \frac{١١}{١٥}$

مثال

اختصر المقدار

$$\frac{(343)^{2\text{س}-\frac{1}{3}} \times (4)^{3\text{س}+1}}{(196)^{3\text{س}} \times 4}$$

الحل

بعد تحليل الأعداد الكبيرة نجد أن :

196	2
98	2
49	7
7	7
1	

343	7
49	7
7	7
1	

$343 = (7)^3$

$196 = (7)^2 \times (2)^2$

$$\therefore \text{المقدار} = \frac{(7^3)^{2\text{س}-\frac{1}{3}} \times (2^2)^{3\text{س}+1}}{(7^2 \times 2^2)^{3\text{س}} \times (2)^2} = \frac{(7)^{6\text{س}-1} \times (2)^{6\text{س}+2}}{(7)^{6\text{س}} \times (2)^{6\text{س}+2}}$$

$$\therefore \text{المقدار} = (7)^{-1} = \frac{1}{7}$$

مثال

أكمل ما يأتي :

(1) إذا كان $5^{\text{س}} = 2$ فإن $(25)^{\text{س}} = \ldots\ldots$

(2) إذا كان $2^{\text{س}} = 5$ فإن $(2)^{\text{س}+2} = \ldots\ldots$

(3) $(-2\text{س}^4)^{-2} = \ldots\ldots$

الحل

(1) $\because 5^{\text{س}} = 2 \quad \therefore (25)^{\text{س}} = (5^2)^{\text{س}} = (5^{\text{س}})^2 = (2)^2 = 4$

(2) $\because 2^{\text{س}} = 5 \quad \therefore (2)^{\text{س}+2} = 2^{\text{س}} \times 2^2 = 5 \times 4 = 20$

(3) $(-2\text{س}^4)^{-2} = (-2)^{-2} \times \text{س}^{-8} = \frac{1}{(-2)^2} \times \frac{1}{\text{س}^8} = \frac{1}{4\text{س}^8}$

الجذر النوني

اذا كانت $a \in ح$ ، $n \in ص^+$ فان المعادلة $س^n = a$ يكون لها عدد (n) من الجذور .

* **ملاحظات :-** اذا كان $س^n = a$ وكان

(١) n عدد زوجياً ، $a > 0$ (موجباً) فان المعادلة $س^n = a$ يكون لها جذران حقيقيان مختلفي الاشارة وباقي الجذور مركبة

مثل $س^4 = 16$ ← المعادلة لها جذران حقيقيان وهما ± 2 وجذران مركبان ويسمى ٢ بالجذر الاساسي للمعادلة

(٢) n عدداً زوجياً ، $a < 0$ (سالباً) فان المعادلة $س^n = a$ يكون لها عدد (n) من الجذور ويكون جميعها مركبة .

مثل $س^2 = -1$ ← $س^2 = ت^2$ ∴ $س = \pm ت$

(٣) n عدد فردياً ، $a \in ح - \{0\}$ فان المعادلة $س^n = a$ يكون لها جذر حقيقي وحيد وباقي الجذور مركبة

مثل $س^3 = 1$ ← لها جذر حقيقي هو $س = 1$ وجذران مركبان .

(٤) اذا كانت $n \in ص^+$ ، $a = 0$

اى أن المعادلة $س^n = صفر$ حيث $n \in ص^+$ يكون لها عدد (n) من الجذور وكل منها يساوى صفر ويكون لها حل وحيد هو $س = 0$.

مثال

أوجد عدد جذور المعادلات الاتية ثم أوجد كل في ح

(١) $4 س^5 = 128$ (٢) $س^6 = -64$

(٣) $2 س^4 = 512$ (٤) $-3 س^5 = -96$

الحل

(١) ∵ $4 س^5 = 128$ ∴ $س^5 = 32$ عدد الجذور = ٥ جذور

∴ $س = \sqrt[5]{32}$ ∴ $س = 2$ (١ حقيقي ، ٤ مركبة)

م . ح = $\{2\}$

(٢) ∵ $س^{٦} = -٦٤$ ← عدد الجذور = ٦ جذور جميعها مركبة

، م.ح = $\emptyset$

(٣) $٢ س^{٤} = ٥١٢$ ∴ $س^{٤} = ٢٥٦$ ← عدد الجذور = ٤ جذور (٢ حقيقيان ، ٢ مركبان)

∴ $س = \pm \sqrt[٤]{٢٥٦}$ ∴ $س = \pm ٤$ ∴ م.ح = {-٤ ، ٤}

(٤) ∵ $٣ س^{٥} = -٩٦$ ∴ $س^{٥} = -٣٢$ ← عدد الجذور = ٥ جذور (١ حقيقي ، ٤ مركبة)

∴ $س = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$

∴ م.ح = {-٢}

الأسس الكسرية

* اذا كان $ن \in ص^{+} - \{١\}$ ، $أ \in ح^{+}$ فإن $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

وهذه العلاقة صحيحة عندما يكون أ < ٠ ، ن عدد فردي أكبر من ١

* $(أ)^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$

مثلاً $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{(٨)^{٢}} = \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

* اذا كان $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردي

* اذا كان $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجي

مثال

اختصر الى ابسط صورة :-

(١) $(\sqrt[٥]{س})^{٢} \times \sqrt[٣]{س^{٢}}$ (٢) $(\sqrt[٣]{أ^{-٥}})^{٢} \times (\sqrt[٤]{أ^{٣}})^{٣}$

الحل

(١) المقدار = $س^{\frac{٢}{٥}} \times س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{٢}{٥}+\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{١٠+٦}{١٥}} = س^{\frac{١٦}{١٥}} = س \sqrt[١٥]{س}$

(٢) $(\sqrt[3]{أ^{-5}})^2 \times (\sqrt[4]{أ^3})^3 = أ^{-\frac{10}{3}} \times أ^{\frac{9}{4}} = أ^{-\frac{13}{12}}$

∴ المقدار $= \frac{1}{أ^{\frac{13}{12}}} = \frac{1}{أ \sqrt[12]{أ}}$

*** ملاحظة هامة :-**

$\sqrt[ن]{أ^ن} = |أ|$ اذا كانت ن عدداً زوجياً

$\sqrt[ن]{أ^ن} = أ$ اذا كانت ن عدد فردياً

مثال أكمل ما يأتي :-

(١) $\sqrt[4]{س^4} =$ ..... (٢) $\sqrt[5]{س^5} =$ .....

(٣) $\sqrt[4]{١٦ س^4 ص^8} =$ ..... (٤) $\sqrt[4]{(-٢)^4} =$ .....

(٥) $\sqrt[3]{(-٢)^3} =$ ..... (٦) اذا كانت $٣^أ = ٤^ب$ فإن $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}} =$ .....

الحل

(١) $\sqrt[4]{س^4} = |س|$ (٢) $\sqrt[5]{س^5} = س$

(٣) $\sqrt[4]{١٦ س^4 ص^8} = \sqrt[4]{١٦} \times \sqrt[4]{س^4} \times \sqrt[4]{ص^8} = ٢ |س| ص^2$

(٤) $\sqrt[4]{(-٢)^4} = |-٢| = ٢$ (٥) $\sqrt[3]{(-٢)^3} = -٢$

(٦) ∵ $٣^أ = ٤^ب$ ∴ $٩^أ = ١٦^ب$ ← ∴ $٩^{\frac{أ}{ب}} = ١٦$ ، $١٦^{\frac{ب}{أ}} = ٩$

∴ المقدار $= ١٦ + ٩ = ٢٥$

مثال أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في ح

(1) $س^{\frac{5}{2}} = 32$ (2) $س^{\frac{7}{2}} = \frac{1}{128}$

(3) $\sqrt[3]{(س-1)^5} = 32$ (4) $(س+1)^{-\frac{5}{2}} = (32)^{-\frac{1}{2}}$

الحل

(1) ∵ $س^{\frac{5}{2}} = 32$ ∴ $س^{\frac{5}{2}} = 2^5$ ∴ $س = (2^5)^{\frac{2}{5}}$

∴ $س = 4$ ∴ م.ح = {4}

(2) ∵ $س^{\frac{7}{2}} = \frac{1}{128}$ ∴ $س^{\frac{7}{2}} = 2^{-7}$ ∴ $س = (2^{-7})^{\frac{2}{7}}$

∴ $س = 2^{-2}$ ∴ $س = \frac{1}{4}$ ∴ م.ح = $\{\frac{1}{4}\}$

(3) ∵ $\sqrt[3]{(س-1)^5} = 32$ ∴ $(س-1)^{\frac{5}{3}} = 2^5$

∴ $س - 1 = (2^5)^{\frac{3}{5}}$ ∴ $س - 1 = 8$ فيها م.ح = {9}

(4) ∵ $(س+1)^{-\frac{5}{2}} = (32)^{-\frac{1}{2}}$ ∴ $(س+1)^{-\frac{5}{2}} = (2)^{-\frac{5}{2}}$

∴ الأس = الأس ← $س + 1 = 2$ فيها م.ح = {1}

مثال أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في ح

(1) $(س^2 - 5س + 9)^{\frac{5}{2}} = 243$ (2) $(\sqrt{س} + 2)^{\frac{1}{2}} = 3$

(3) $س^{\frac{4}{5}} - 5 س^{\frac{2}{5}} + 4 = 0$ (4) $\sqrt[3]{س^4} - 25 - \sqrt[3]{س} - 54 = 0$

الحل

(1) ∵ $(س^2 - 5س + 9)^{\frac{5}{2}} = 243$

∴ $س^2 - 5س + 9 = (3^5)^{\frac{2}{5}}$ ∴ $س^2 - 5س + 9 = 9$

Scanned by CamScanner

∵ $س^2 - 5س = 0$ ∴ $س(س - 5) = 0$

∴ $س = 0$ ، $س = 5$ ∴ م.ح = {٠، ٥}

(٢) ∵ $(\sqrt{س} + 2)^{\frac{1}{2}} = 3$ ∴ $\sqrt{س} + 2 = 9$

∴ $\sqrt{س} = 7$ منها $س = 49$ ∴ م.ح = {٤٩}

(٣) ∵ $س^{\frac{4}{5}} - 5س^{\frac{2}{5}} + 4 = 0$ ∴ $(س^{\frac{2}{5}} - 4)(س^{\frac{2}{5}} - 1) = 0$

∴ إما $س^{\frac{2}{5}} = 4$ منها $س = (4)^{\frac{5}{2}} = \pm 32$

أو $س^{\frac{2}{5}} = 1$ منها $س = (1)^{\frac{5}{2}} = \pm 1$

∴ م.ح = {−١، ١، −٣٢، ٣٢}

(٤) ∵ $\sqrt[3]{س^2} - 25\sqrt[3]{س} - 54 = 0$ ∴ $س^{\frac{2}{3}} - 25س^{\frac{1}{3}} - 54 = 0$

∴ $(س^{\frac{1}{3}} - 27)(س^{\frac{1}{3}} + 2) = 0$ منها

إما $س^{\frac{1}{3}} = 27$ ∴ $س = (27)^3 = 19683$

أو $س^{\frac{1}{3}} = -2$ ∴ $س = (-2)^3 = -8$

∴ م.ح = {١٩٦٨٣، −٨}

مثال إذا كان $س^{\frac{3}{2}} = 3ص^{\frac{2}{3}} = 27$

أوجد قيمة المقدار س + ص

الحل

∵ $س^{\frac{3}{2}} = 27$ ∴ $س = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 9$

∵ $3ص^{\frac{2}{3}} = 27$ ∴ $ص^{\frac{2}{3}} = 9$ ∴ $ص = (9)^{\frac{3}{2}} = \pm 27$

∴ المقدار $س + ص = 9 + 27 = 36$

أو $س + ص = 9 - 27 = -18$

الدالة الأسية

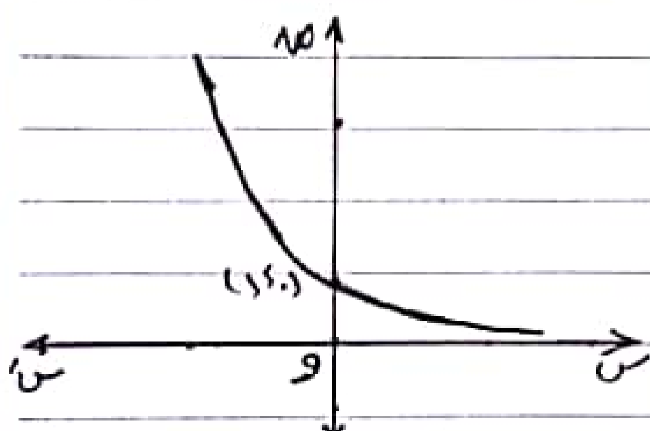
* اذا كانت a عدداً حقيقياً موجباً $\neq 1$ فان الدالة
د: ح ← $ح^+$ حيث د (س) = $a^{س}$ تسمى دالة اسية أساسها (a)

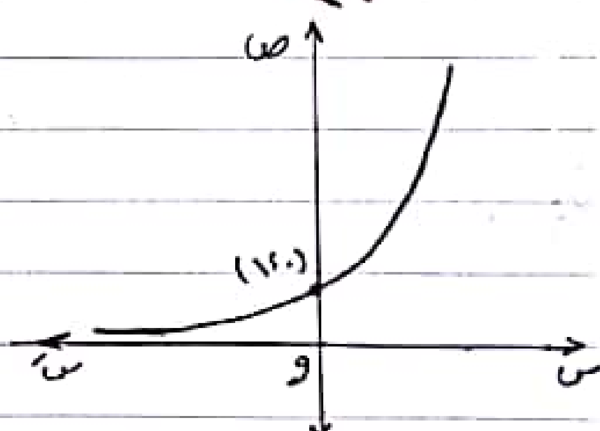
مثلا :- د(س) = $5^{س+1}$ دالة أسية أساسها 5

د(س) = $(-5)^{س+1}$ ليست دالة اسيه لان الاساس < 0

* ابسط صورة للدالة الاسية هى د(س) = $a^{س}$
ويكون شكلها البيانى كالاتى

$0 < a < 1$ $a > 1$





د(س) = $a^{س}$ ، $a > 1$
مجالها = ح
مداها = $ح^+$
الدالة تزايدية على مجالها
ولذلك تسمى دالة نمو اسى
منحنى الدالة يمر بالنقطة (0،1) والمنحنى لا يقطع محور س فى هذه الحالة

د(س) = $a^{س}$ ، $0 < a < 1$
مجالها = ح
مداها = $ح^+$
الدالة تناقصية على مجالها
ولذلك تسمى دالة تضاؤل اسى
منحنى الدالة يمر بالنقطة (0،1)
والمنحنى لا يقطع محور س فى هذه الحالة

* الصورة العامة للدالة الأسية

د(س) = ع $أ^{س+ب}$ + حـ ← مجالها = ح ومداها =]حـ، ∞[أو]-∞، حـ[

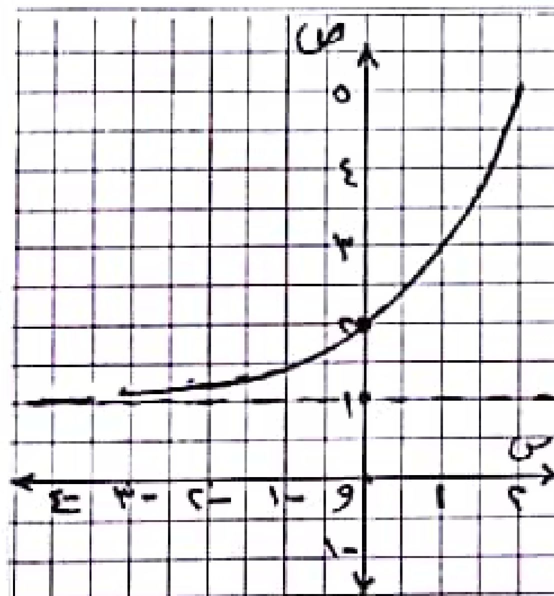
(1) إذا كانت ع < ٠ (عدد سالب) فإن منحنى الدالة د(س) يكون منعكساً في محور السينات

(2) منحنى الدالة د(س) = $أ^{س+ب}$ + حـ هو نفس منحنى الدالة د(س) = $أ^{س}$ بانتقال هندسي (-ب، حـ) حيث (ب) هي الإزاحة الأفقية، حـ الإزاحة الرأسية

مثال

ارسم الشكل البياني للدالة د(س) = $2^{س}$ + 1 ثم ادرس هذه الدالة

الحل



∵ ع = 1

ب = ٠ حـ = 1

∴ منحنى الدالة د(س) = $2^{س}$ + 1 هو نفس منحنى الدالة د(س) = $2^{س}$ بإزاحة رأسية قدرها 1 وحدة في اتجاه و ص

مجال الدالة = ح

مداها =]1، ∞[

الدالة تزايدية على مجالها

الدالة أحادية ومنحنى الدالة يقع فوق المستقيم ص = 1

مثال

ارسم الشكل البياني للدالة د(س) = $-3^{1-س}$ + 2 ثم ادرس هذه الدالة

الحل

$\because$ د(س) = $-3^{س-1}$ + ٢

$\therefore$ د(س) = $-(3)^{-(س-1)}$ + ٢

$\therefore$ د(س) = $-\left(\frac{1}{3}\right)^{س-1}$ + ٢

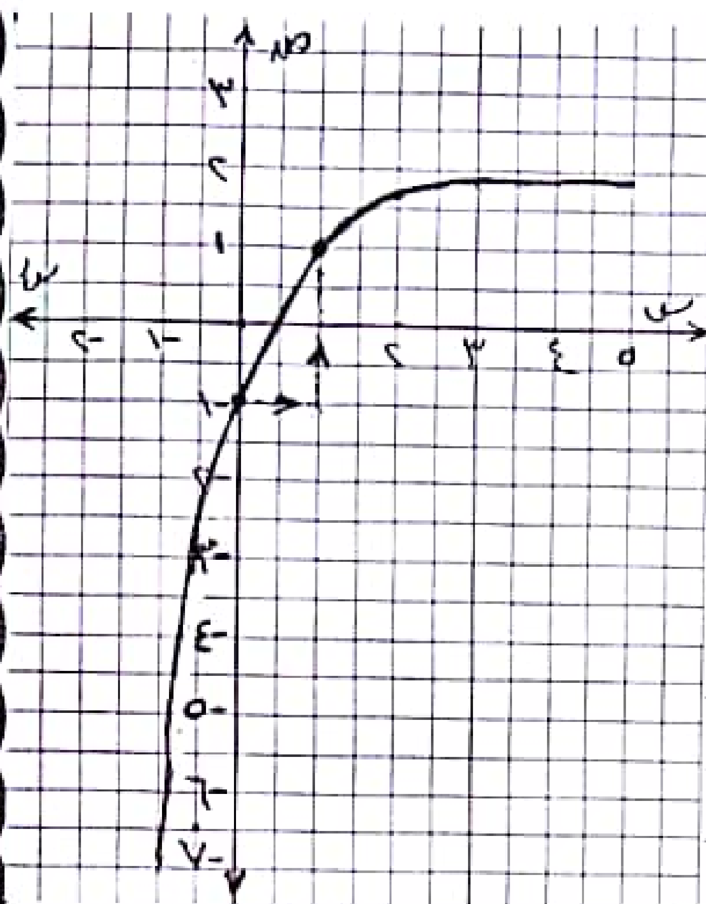
$\therefore$ ٤ = -١ ، ب = -١ ، هـ = ٢

$\therefore$ منحنى الدالة:

د(س) = $-\left(\frac{1}{3}\right)^{س-1}$ + ٢

هو نفس منحنى الدالة

د(س) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{س}$



بانعكاس في محور السينات ثم ازاحة افقية قدرها ١ وحدة في اتجاه و س ثم ازاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه محور و ص

مجال الدالة = ح ومداها =]-∞ ، ٢[

الدالة تزايدية على مجالها

الدالة احادية - الدالة ليست فردية وليست زوجية

* تدريب: أكمل ما يأتي:

(١) معادلة محور تماثل منحنى الدالتين د(س) = $3^{س}$ ، ر(س) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{س}$

هي ...... (هو محور الصادات ومعادلته س = ٠)

(٢) د(س) = $\left(\frac{-1}{2}\right)^{س+2}$ ليست دالة اسية لان ....

تطبيقات على الدالة الأسية

(١) دالة النمو الأسي :-

$د(ن) = أ (١ + ر)^ن$ حيث أ القيمة الابتدائية للمتغير

ر النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة

أي أنه ر معدل النمو ، ن الفترة الزمنية

مثال

أجب عن الآتي

(١) إذا كان المتغير ص يأخذ قيمة ابتدائية أ ثم يزداد بمعدل ٥ ٪ كل ساعة فإن دالة النماء الأسي الخاصة بالمتغير ص بعد زمن قدره ن هي .... (أكمل)

(٢) بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات في جمهورية مصر العربية ٤٫٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤ ٪ سنوياً

أ- اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلي بعد عدد ن سنة

ب- قدر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من التعداد

الحل

(١) ∵ القيمة الابتدائية = أ ر = ٥٪ = $\frac{٥}{١٠٠}$ = ٠٫٠٥

∴ دالة النماء الأسي هي $د(ن) = أ(١ + ٠٫٠٥)^ن = أ(١٫٠٥)^ن$

(٢) ∵ أ = ٤٫٦ ر = ٤ ٪ = ٠٫٠٤

∴ دالة النمو الأسي هي $د(ن) = ٤٫٦ (١ + ٠٫٠٤)^ن$

∴ دالة النمو الأسي هي $د(ن) = ٤٫٦ (١٫٠٤)^ن$

ثانياً : بعد مرور ٥ سنوات فإن ن ن = ٥

∴ $د(٥) = ٤٫٦ (١٫٠٤)^٥$ = ٥٫٦ مليون نسمة تقريباً

(٢) دالة التضاؤل الاسى :-

د(ن) = أ (١ - ر)^ن حيث أ القيمة الابتدائية للمتغير ، ر معدل التناقص (النسبة المئوية) ، ن الزمن

مثال

يتناقص انتاج منجم ذهب سنوياً بمقدار ٥ ٪ فاذا كان انتاج المنجم فى السنة الاولى حوالى ٢٥٤ كجم قدر انتاج المنجم فى السنة التاسعة

الحل

أ = ٢٥٤ كجم ر = ٥ ٪ = ٠,٠٥ ن = ٩ سنوات

∵ د(ن) = أ (١ - ر)^ن

∴ د(ن) = ٢٥٤ (١ - ٠,٠٥)^٩ = ٢٥٤ × (٠,٩٥)^٩ = ١٦٠ كجم تقريباً

المعادلات الاسية

*تذكر أن :-

(١) اذا كان أ^ن = ١ فان ن = صفر

(٢) اذا كان أ^م = أ^ن فان م = ن لكل أ ∈ ح - {٠ ، ١ ، -١}

(٣) اذا كان أ^ن = ب^ن فان

أ = ب اذا كانت ن عدداً فردياً مثل أ^٣ = (٢)^٣ فان أ = ٢

أ = ± ب اذا كانت ن عدد زوجياً مثل أ^٢ = (٢)^٢ فان أ = ± ٢

اما اذا كان أ ≠ ب فان ن = صفر

مثال

اوجد قيمة س التى تحقق المعادلات الاتية

(١) ٢^(س+٥) = ٨ (٢) ٣^(س^٢-٤) = ١

(٣) ٣^(س+٢) = $\frac{١}{٩}$ (٤) ٥^(س-١) = ٤^(س-١)

الحل

(1) ∵ $2^{س+5} = 8$ ∴ $2^{س+5} = (2)^3$ ∴ $س + 5 = 3$ ∴ $س = -2$

(2) ∵ $3^{س^2-4} = 1$ ∴ $س^2 - 4 = 0$ ∴ $س = \pm 2$

(3) $3^{س+2} = \frac{1}{9}$ ∴ $3^{س+2} = (3)^{-2}$ ∴ $س + 2 = -2$ ∴ $س = -4$

(4) $5^{س-1} = 4^{س-1}$ ∴ $س - 1 = 0$ ∴ $س = 1$

مثال

اوجد مجموعة حل المعادلات الآتية

(1) $5^{س+2} = س^{س+2}$ (2) $س^{س^2-25} = 3^{س^2-25}$

(3) $(3\sqrt{3})^{|س|} = 27$

الحل

(1) ∵ $5^{س+2} = س^{س+2}$ ∴ اما $س + 2 = 0$ منها $س = -2$

أو $س = 5$ وعندها الاس = 7 عدداً فردياً ← $س = 5$ فقط

∴ م.ح = $\{-2 ، 5\}$

(2) ∵ $س^{س^2-25} = 3^{س^2-25}$ ∴ إما $س^2 - 25 = 0$ منها $س = \pm 5$

أو $س = 3$ ∴ الاس = -16 ∴ $س = \pm 3$

∴ م.ح = $\{-3 ، 3 ، -5 ، 5\}$

(3) $(3\sqrt{3})^{|س|} = (\sqrt{3})^6$ ∴ $(\sqrt{3})^{3|س|} = (\sqrt{3})^6$

∴ $3|س| = 6$ ∴ $|س| = 2$ ∴ $س = \pm 2$

∴ م.ح = $\{-2 ، 2\}$

مثال أوجد في ح مجموعة حل المعادلة

$٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$

الحل

$٢^{س} × ٢ + ٢^{س} × \frac{١}{٢} = ٥ \Leftarrow ٢^{س}(٢ + \frac{١}{٢}) = ٥$

∴ $٢^{س} × \frac{٥}{٢} = ٥$ ∴ $٢^{س} = ٢$ ∴ $س = ١$

∴ م.ح = $\{١\}$

مثال أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية في ح

(١) $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$

(٢) $(\frac{١}{٢})^{س+١} + (\frac{١}{٢})^{س+٣} + (\frac{١}{٢})^{س+٥} = ٨٤$

الحل

(١) ∵ $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$ ∴ $٢^{س} + ٢^{٥} × \frac{١}{٢^{س}} = ١٢$

بضرب الطرفين × $٢^{س}$

∴ $٢^{٢س} - ١٢ × ٢^{س} + ٣٢ = ٠$ $\xrightarrow{\text{تحليل}}$ $(٢^{س} - ٨)(٢^{س} - ٤) = ٠$

منها $٢^{س} = ٨$ ∴ $٢^{س} = ٢^{٣}$ منها $س = ٣$

أو $٢^{س} = ٤$ ∴ $٢^{س} = ٢^{٢}$ منها $س = ٢$

∴ م.ح = $\{٢ ، ٣\}$

(٢) ∴ $(\frac{١}{٢})^{س} [\frac{١}{٢} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٣٢}] = ٨٤$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} × \frac{١٦ + ٤ + ١}{٣٢} = ٨٤$ ∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = ٣٢ × ٤$

∴ $٢^{-س} = ١٢٨$ ∴ $٢^{-س} = ٢^{٧}$ منها $س = -٧$

∴ م.ح = $\{-٧\}$

مثال أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلة

(1) $3^{س} \times 5^{ص} = 75$ ، $3^{ص} \times 5^{س} = 45$

الحل

∵ $3^{س} \times 5^{ص} = 25 \times 3$ ∴ $3^{س} \times 5^{ص} = 5^{2} \times 3$ (1)

∵ $3^{ص} \times 5^{س} = 9 \times 5$ ∴ $3^{ص} \times 5^{س} = 3^{2} \times 5$ (2)

بقسمة (1) ÷ (2) ينتج

∴ $\frac{5^{ص}}{5^{س}} \times \frac{3^{س}}{3^{ص}} = \frac{5}{3}$ ∴ $5^{ص-س} \times 3^{س-ص} = \frac{5}{3}$

∴ $5^{ص-س} \times (\frac{1}{3})^{ص-س} = \frac{5}{3}$ ∴ $(\frac{5}{3})^{ص-س} = \frac{5}{3}$

∴ ص − س = 1 ← (3) بالتعويض في (1)

∴ ص = س + 1

∴ $3^{س} \times 5^{س+1} = 5^{2} \times 3$ ∴ $3^{س} \times 5^{س} \times 5 = 5^{2} \times 3$

∴ $(15)^{س} = 15$ ∴ س = 1 ، ص = 2

∴ م.ح = {(1، 2)}

مثال إذا كانت د(س) = $7^{س+1}$ أوجد قيمة س إذا كان

د(2س − 1) + د(س − 2) = 50

الحل

∵ د(س) = $7^{س+1}$

∵ د(2س − 1) + د(س − 2) = 50 ∴ $7^{2س-1+1} + 7^{س-2+1} = 50$

∴ $7^{2س} + 7^{س-1} = 50$ ∴ $7^{2س} + \frac{7^{س}}{7} - 50 = 0$

∴ $7 \times 7^{2س} + 7^{س} - 350 = 0$ بالتحليل نجد أن

∴ $7^{س} = 7$ منها س = ١

أو $7^{س} = -\frac{٥٠}{٧}$ مرفوض ∴ م.ح = {١}

مثال إذا كانت د(س) = $7^{س}$ أوجد قيمة س إذا كان د(٢س − ١) + د(٢س + ١) = $\frac{٥٠}{٤٩}$

الحل

∵ د(س) = $7^{س}$

∵ د(٢س − ١) + د(٢س + ١) = $\frac{٥٠}{٤٩}$ ∴ $7^{2س-1} + 7^{2س+1} = \frac{٥٠}{٤٩}$

∴ $7^{2س} \times \frac{1}{7} + 7^{2س} \times 7 = \frac{٥٠}{٤٩}$

∴ $7^{2س}\left(\frac{1}{7} + 7\right) = \frac{٥٠}{٤٩}$ ∴ $7^{2س} \times \frac{٥٠}{٧} = \frac{٥٠}{٤٩}$

∴ $7^{2س} = \frac{1}{7}$ ∴ $7^{2س} = 7^{-1}$ ∴ ٢س = −١ ∴ س = $\frac{-1}{2}$

مثال إذا كانت د₁(س) = $3^{س}$ ، د₂(س) = $9^{س}$

أوجد قيمة س التي تحقق د₁(٢س − ١) + د₂(س + ١) = ٧٥٦

الحل

∵ د₁(س) = $3^{س}$ ، د₂(س) = $9^{س}$ ∴ د₂(س) = $3^{2س}$

∵ د₁(٢س − ١) + د₂(س + ١) = ٧٥٦

∴ $3^{2س-1} + 3^{2(س+1)} = ٧٥٦$ ∴ $\frac{3^{2س}}{3} + 3^{2س} \times 3^{2} = ٧٥٦$

∴ $3^{2س}\left[\frac{1}{3} + 9\right] = ٧٥٦$ ∴ $3^{2س} \times \frac{٢٨}{٣} = ٧٥٦$

∴ $3^{2س} = ٨١$ ∴ $3^{2س} = 3^{4}$ منها س = ٢

الدالة العكسية

اذا كانت د دالة احادية من س الى ص فان $د^{-1}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص الى س اذا كان لكل (م، ن) ∈ بيان الدالة د فان (ن، م) ∈ بيان الدالة العكسية $د^{-1}$
اى أن مدى الدالة د هو مجالاً للدالة العكسية $د^{-1}$
ومجال الدالة د هو مدى للدالة العكسية $د^{-1}$
ويمكن ايجاد قاعدة الدالة العكسية $د^{-1}$ وذلك بتبديل المتغيرين س، ص فى قاعدة الدالة د ثم ايجاد ص بدلالة س

مثال

اذا كانت الدالة د معرفة من المجموعة
س = {٢، ٣، ٤، ٥} الى المجموعة ص = {٤، ٥، ٦، ٧}
وكانت د(س) = س + ٢
(١) اوجد بيان $د^{-1}$ (٢) استنتج قاعدة $د^{-1}$

الحل

∵ د: س ← ص حيث د(س) = س + ٢
∴ د(٢) = ٢ + ٢ = ٤ د(٣) = ٣ + ٢ = ٥
د(٤) = ٤ + ٢ = ٦ د(٥) = ٥ + ٢ = ٧
∴ بيان الدالة د = {(٢، ٤)، (٣، ٥)، (٤، ٦)، (٥، ٧)}
∴ بيان الدالة العكسية $د^{-1}$ = {(٤، ٢)، (٥، ٣)، (٦، ٤)، (٧، ٥)}

(٢) ∵ د(س) = س + ٢ ← ∴ ص = س + ٢ ولايجاد قاعدة الدالة العكسية نقوم بتبديل المتغيرين
∴ س = ص + ٢ منها ص = س − ٢
∴ $د^{-1}$(س) = س − ٢

* خواص الدالة العكسية :-

(١) يقال أن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى اذا كان
(د ∘ ر)(س) = س ، (ر ∘ د)(س) = س

(٢) مجال د = مدى د$^{-1}$ (٣) مدى د = مجال د$^{-1}$

(٤) الدالة د والدالة العكسية لها د$^{-1}$ متماثلتان بالنسبة للمستقيم ص = س . اى أن د ، د$^{-1}$ كلا منهما صورة للأخرى بالانعكاس فى المستقيم ص = س
اى أن صورة النقطة (ا ، ب) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى (ب ، ا)

مثال

أكمل ما يأتى

(١) اذا كانت الدالة د = {(١ ، ٤) ، (٢ ، -٣) ، (٣ ، ١)} فإن د$^{-1}$ = ...

(٢) اذا كانت د(س) = س + ٣ فإن د$^{-1}$(س) = ...

(٣) صورة النقطة (٢ ، ١) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى ....

(٤) اذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-1}$ فى نقطة (ك ، ٢ك - ٢) فإن ك = ...

(٥) اذا كانت د دالة احادية وكان د(٢) = ٦ فإن د$^{-1}$(٦) = ...

الحل

(١) د$^{-1}$ = {(٤ ، ١) ، (-٣ ، ٢) ، (١ ، ٣)}

(٢) د$^{-1}$(س) = س - ٣

(٣) صورة النقطة (٢ ، ١) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى (١ ، ٢)

(٤) ∵ (ك ، ٢ك - ٢) ∋ د ، د$^{-1}$ ∴ ك = ٢ك - ٢
∴ ك = ٢

(٥) ∵ د دالة احادية حيث د(٢) = ٦ ∴ د$^{-1}$(٦) = ٢

مثال أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية:

(١) $د(س) = \frac{١}{٢} س + ٤$ (٢) $د(س) = ٥ + \frac{٤}{س}$

(٣) $د(س) = ٨ س^{٣} - ١$ (٤) $د(س) = ٢ + \sqrt{٣ - س}$

الحل

(١) ∵ $د(س) = \frac{١}{٢} س + ٤$ ∴ $ص = \frac{١}{٢} س + ٤$

بتبديل المتغيرين ∴ $س = \frac{١}{٢} ص + ٤$

∴ $س - ٤ = \frac{١}{٢} ص$ ⟵ $ص = ٢ س - ٨$

∴ $د^{-١}(س) = ٢ س - ٨$

(٢) ∵ $ص = ٥ + \frac{٤}{س}$ بتبديل المتغيرين ∴ $س = ٥ + \frac{٤}{ص}$

∴ $س - ٥ = \frac{٤}{ص}$ منها $ص = \frac{٤}{س - ٥}$

∴ $د^{-١}(س) = \frac{٤}{س - ٥}$

(٣) ∵ $ص = ٨ س^{٣} - ١$ بتبديل المتغيرين ∴ $س = ٨ ص^{٣} - ١$

∴ $س + ١ = ٨ ص^{٣}$ منها $ص = \frac{١}{٢} \sqrt[٣]{س + ١}$

∴ $د^{-١}(س) = \frac{١}{٢} \sqrt[٣]{س + ١}$

(٤) ∵ $ص = ٢ + \sqrt{٣ - س}$ بتبديل المتغيرين ∴ $س = ٢ + \sqrt{٣ - ص}$

∴ $س - ٢ = \sqrt{٣ - ص}$ ∴ $(س - ٢)^{٢} = ٣ - ص$

∴ $ص = ٣ - (س - ٢)^{٢}$ منها $د^{-١}(س) = ٣ - (س - ٢)^{٢}$

* تدريب :-

عين مجال الدوال العكسية السابقة في هذا المثال

مثال عين المجال الذي يكون فيه للدوال الآتية دالة عكسية وأوجد الدالة العكسية:

(١) د(س) = ½ س   (٢) د(س) = $س^٣$

(٣) د(س) = $س^٢$

الحل

(١) ∵ د(س) = ½ س دالة احادية مداها ح

∴ يوجد للدالة د دالة عكسية مجالها = ح

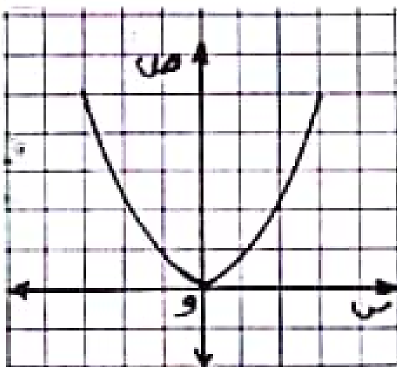
حيث $د^{-١}$(س) = ٢ س

(٢) ∵ د(س) = $س^٣$ دالة أحادية مداها = ح

∴ يوجد للدالة د دالة عكسية مجالها = ح

حيث $د^{-١}$(س) = $\sqrt[٣]{س}$

(٣) د(س) = $س^٢$ دالة ليست احادية مجالها = ح



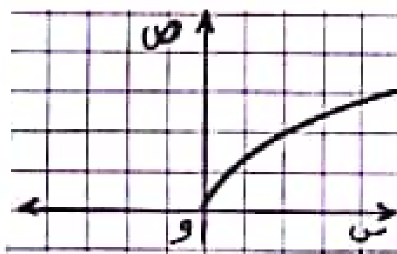
ولكن من الشكل البياني للدالة نجد أن الدالة احادية في الفترة]-∞، ٠] وكذلك احادية في الفترة [٠، ∞[

∴ يمكن أن يكون للدالة د(س) = $س^٢$ دالة عكسية

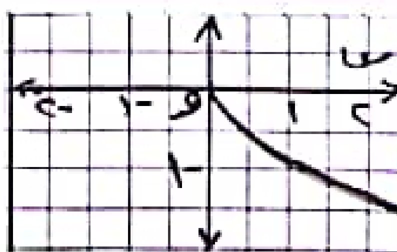
ولكن في المجال]-∞، ٠] أو [٠، ∞[

∴ ص = $س^٢$ بتبديل المتغيرين

∴ س = $ص^٢$ منها ص = ± $\sqrt{س}$



∴ $د^{-١}$(س) = $\sqrt{س}$ لكل س ∈ [٠، ∞[←



$د^{-١}$(س) = - $\sqrt{س}$ لكل س ∈ [٠، ∞[←

الدالة اللوغاريتمية

لكل صورة اسية $س = ^{ص}م$ اساسها م عدد حقيقى موجب لا يساوى **الواحد** يوجد لها صورة لوغاريتمية $ص = لو_م س$ أى أن لكل م ∈ ح+ - {١} ، س ∈ ح+ ، ص ∈ ح

فان : $ص = لو_م س \Longleftrightarrow س = ^{ص}م$

أى أن سواء فى الدالة الاسية $س = ^{ص}م$

أو فى الدالة **اللوغاريتمية** $ص = لو_م س$ فإنه

(١) الاساس (م) عدد حقيقى موجب ≠ ١

(٢) الاس (ص) عدد حقيقى

(٣) العدد (س) عدد حقيقى موجب

مثال

اكتب الصورة اللوغاريتمية **لكل من**

(١) $١٦ = ^{٤}٢$ (٢) $\frac{١}{٢٧} = ^{-٣}٣$ (٣) $١٢٥ = ^{٣}٥$

الحل

* عند التحويل من الصورة الاسية الى الصورة اللوغاريتمية

فانه الاس = $لو_{الاساس}$ العدد

(١) ∵ $١٦ = ^{٤}٢$ (٤ ← أس ، ٢ ← اساس ، ١٦ ← عدد) ← ∴ $٤ = لو_٢ ١٦$ بالمثل

(٢) ∵ $\frac{١}{٢٧} = ^{-٣}٣$ ← ∴ $-٣ = لو_٣ \frac{١}{٢٧}$

(٣) ∵ $١٢٥ = ^{٣}٥$ ← ∴ $٣ = لو_٥ ١٢٥$

مثال اكتب الصورة الاسية لكل ما يأتي :-

(١) $لو_{٢} ٨ = ٣$ (٢) $لو_{٣} ٨١ = ٤$ (٣) $لو_{٢} \frac{١}{٨} = -٣$

الحل

(١) ∵ $لو_{٢} ٨ = ٣$ ← ∴ $٨ = ٢^{٣}$

(العدد ، الاس ، الاساس)

(٢) ∵ $لو_{٣} ٨١ = ٤$ ← ∴ $٨١ = ٣^{٤}$

(٣) ∵ $لو_{٢} \frac{١}{٨} = -٣$ ← ∴ $\frac{١}{٨} = ٢^{-٣}$

مثال أكمل ما يأتي :-

(١) $لو_{٢} (\frac{١}{٤}) = ...$ (٢) $لو_{٥} ٦٢٥ = ...$ (٣) $لو_{٢} ٨\sqrt{٢} = ...$

الحل

(١) $لو_{٢} (\frac{١}{٤}) = -٢$ (٢) $لو_{٥} ٦٢٥ = ٤$ (٣) $لو_{٢} ٨\sqrt{٢} = ٣,٥$

مثال اوجد مجموعة حل المعادلات الاتية

(١) $لو_{٢} س = -٤$ (٢) $لو_{س} ٧س = ٢$ (٣) $(لو_{٢} س)^{٢} - ٣ لو_{٢} س = ٤$

الحل

(١) ∵ $لو_{٢} س = -٤$ ∴ $س = ٢^{-٤}$ ∴ $س = \frac{١}{١٦} \in ح^{+}$

∴ م.ح = $\{\frac{١}{١٦}\}$

(٢) ∵ $لو_{س} ٧س = ٢$ ∴ $٧س = س^{٢}$ ∴ $س^{٢} - ٧س = ٠$

∴ $س(س - ٧) = ٠$ منها $س = ٠ \notin ح^{+}$ ∴ $س = ٠$ مرفوض

$س = ٧ \in ح^{+}$ ∴ م.ح = $\{٧\}$

(٣) ∵ $(لو_٢ س)^2 - ٣ لو_٢ س - ٤ = ٠$ ∴ $(لو_٢ س - ٤)(لو_٢ س + ١) = ٠$

∴ $لو_٢ س + ١ = ٠$ منها $لو_٢ س = -١$ ∴ $س = ٢^{-١} = \frac{١}{٢} \in ح^+$

أو $لو_٢ س - ٤ = ٠$ منها $لو_٢ س = ٤$ ∴ $س = ٢^{٤} = ١٦ \in ح^+$

∴ م.ح = $\{\frac{١}{٢} ، ١٦\}$

مثال

أوجد قيمة ما يأتي :-

(١) $لو_{\frac{٢}{٣}} ٥\frac{١}{١٦}$ (٢) $لو_٨ لو_٤ لو_٢ ١٦$ (٣) $لو_٣ ظا \frac{٧\pi}{٦}$

الحل

(١) ∵ $لو_{\frac{٢}{٣}} ٥\frac{١}{١٦} = لو_{\frac{٢}{٣}} \frac{٨١}{١٦} = لو_{\frac{٢}{٣}} (\frac{٣}{٢})^{٤} = لو_{\frac{٢}{٣}} (\frac{٢}{٣})^{-٤} = -٤$

(٢) ∵ $لو_٨ لو_٤ لو_٢ ١٦ = لو_٨ لو_٤ ٤ = لو_٨ ١ =$ صفر

(٣) $لو_٣ ظا \frac{\pi}{٦} = لو_٣ \frac{١}{\sqrt{٣}} = لو_٣ (\sqrt{٣})^{-١} = لو_٣ (٣)^{-\frac{١}{٢}} = -\frac{١}{٢}$

مثال

$لو_٢ (٢^{س} - ٣) = ٢ - س$

الحل

∵ $لو_٢ (٢^{س} - ٣) = ٢ - س$ ∴ $٢^{س} - ٣ = ٢^{٢ - س}$

بالضرب × $٢^{س}$

∴ $٢^{٢س} - ٣ \times ٢^{س} = ٢^{٢}$ ∴ $٢^{٢س} - ٣ \times ٢^{س} - ٤ = ٠$

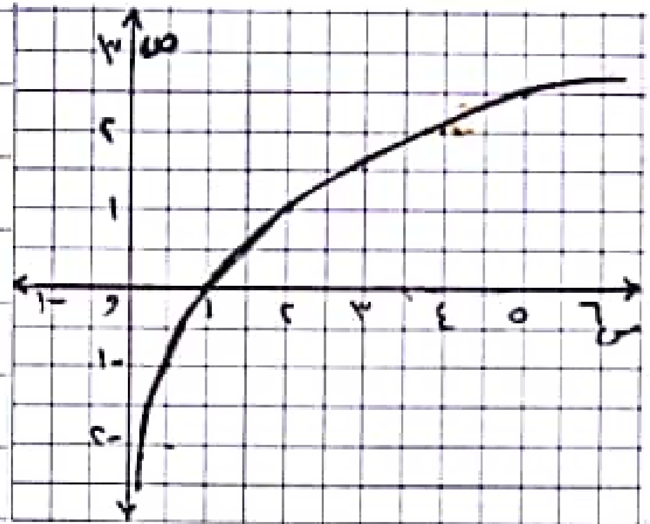
$(٢^{س} - ٤)(٢^{س} + ١) = ٠$ منها $٢^{س} + ١ = ٠$ ∴ $٢^{س} = -١$ مرفوض لماذا

أو $٢^{س} - ٤ = ٠$ ∴ $٢^{س} = ٢^{٢}$ منها س = ٢

∴ م.ح = $\{٢\}$

* التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية :

إذا كانت $أ > 1$



د(س) = لو$_أ$ س حيث أ > ٠

مجال الدالة = ح$^+$

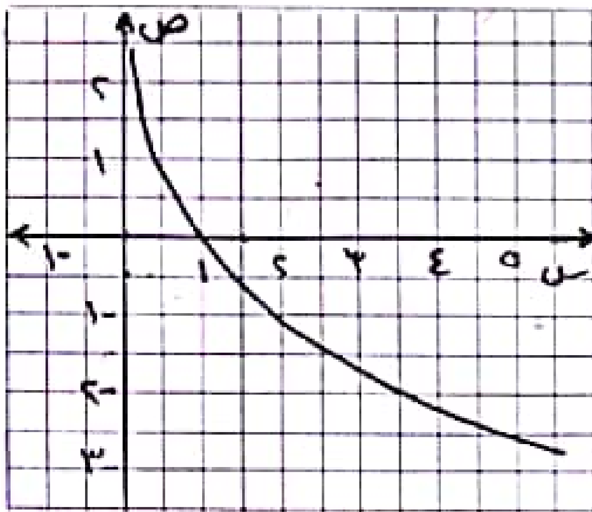
مداها = ح

الدالة تزايدية على مجالها

منحنى الدالة يمر بالنقطة (١، ٠)

الدالة احادية

إذا كانت $٠ < أ < ١$



د(س) = لو$_أ$ س حيث ٠ < أ < ١

مجال الدالة = ح$^+$

مداها = ح

الدالة تناقصية على مجالها

منحنى الدالة يمر بالنقطة (١، ٠)

الدالة احادية

* الدالة اللوغاريتمية دالة احادية بمعنى أنه اذا كان لو$_أ$ س = لو$_أ$ ص فإن س = ص

* الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الاسية بمعنى أن الدالة د(س) = لو$_أ$ س هي دالة عكسية للدالة د(س) = أ^س

* تدريب :

اوجد مجال الدالة د(س) = لو$_{س-٢}$ س

مثال أوجد مجال الدوال الآتية

(١) $لو_{٤}(٤ - س)$ (٢) $لو_{٢-س} س$



(١) ∵ $د(س) = لو_{٤}(٤ - س)$ ∴ $(٤ - س)$ لابد أن يكون عدد حقيقي موجب

∴ $٤ - س > ٠$ ومنها $س < ٤$

∴ مجال الدالة = $]-\infty ، ٤[$

(٢) ∵ $د(س) = لو_{٢-س} س$ ∴ لابد ان تتوفر الشروط الآتية

(١) $س \in ح^{+}$ ⟵ $س > ٠$

(٢) $(٢ - س) \in ح^{+}$ ، $٢ - س \neq ١$

∴ من ①، ② ينتج أن $٢ - س > ٠$ ، $س \neq ١$ ، $س > ٠$

∴ $س < ٢$ ، $س \neq ١$ ، $س > ٠$

∴ مجال الدالة = $]٠ ، ٢[- \{١\}$

*** الصورة العامة للدالة اللوغاريتمية :.**

$د(س) = ء لو_{أ}(س + ب) + حـ$

(١) إذا كانت $ء < ٠$ (سالبة) فإن منحنى الدالة $د(س)$ يكون انعكاس لمنحنى الدالة $ر(س) = لو_{أ} س$ في محور السينات

(٢) $(-ب)$ الإزاحة الأفقية ، حـ الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة $د(س)$

مثال استخدم الدالة $د(س) = لو س$ في وصف التحويلات الهندسية للدوال الآتية بدون رسم المنحنيات

(١) $د(س) = لو_{٣} س + ٢$ (٢) $ل(س) = - لو_{٣} س$

(٣) ر(س) = $لو_٣$(-س) *** (٤) ر(س) = $لو_٣$(س-١) - ٧



(١) ∵ ر(س) = $لو_٣$ س + ٢ ∴ ء = ١ ، ب = ٠ ، ح = ٢

∴ منحنى الدالة ر(س) = $لو_٣$ س + ٢ هو نفس منحنى الدالة
د(س) = $لو_٣$ س بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ص

(٢) ∵ ر(س) = - $لو_٣$ س ∴ ء = -١ ، ب = ٠ ، ح = ٠

∴ منحنى الدالة ر(س) = - $لو_٣$ س هو انعكاس لمنحنى الدالة
د(س) = $لو_٣$ س في محور السينات

(٣) ∵ ر(س) = $لو_٣$(-س) ← إذا كان معامل س سالب
الانعكاس يكون في محور ص
∴ منحنى الدالة ر(س) = $لو_٣$(-س) هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) = $لو_٣$ س في محور ص

(٤) ∵ ر(س) = $لو_٣$(س-١) - ٧ ∴ ء = ١ ، ب = -١ ، ح = -٧

∴ منحنى الدالة ر(س) = $لو_٣$(س-١) - ٧ هو نفس منحنى
منحنى الدالة د(س) = $لو_٣$ س بإزاحة أفقية مقدارها ١ وحدة
في اتجاه و س يتبعها إزاحة رأسية قدرها ٧ وحدات
في اتجاه و ص

* ملحوظة :- اللوغاريتم المعتاد (لو) هو لوغاريتم
أساسه ١٠ ولكن لا تكتب

خواص اللوغاريتمات

(١) اذا كانت $أ \in ح^{+} - \{١\}$ فان $لو_{أ}\,أ = ١$ ، $لو_{أ}\,١ = صفر$

مثلاً $لو_{٢}\,٢ = ١$ ، $لو_{٣}\,١ = صفر$

(٢) $لو_{أ}\,س^{م} = م\,لو_{أ}\,س$

مثلا $لو_{٥}\,٩^{-٢} = -٢\,لو_{٥}\,٩$ ، $لو_{٩}\,٩^{-٢} = -٢\,لو_{٩}\,٩ = -٢$

(٣) $لو_{أ}\,س\,ص = لو_{أ}\,س + لو_{أ}\,ص$ والعكس صحيح

مثلا $لو_{٢}\,٢س = لو_{٢}\,٢ + لو_{٢}\,س = ١ + لو_{٢}\,س$

(٤) $لو_{أ}\,\frac{س}{ص} = لو_{أ}\,س - لو_{أ}\,ص$ والعكس صحيح

مثلاً $لو\,\frac{٢}{٥} = لو\,٢ - لو\,٥$

(٥) $لو_{ص}\,س = \frac{لو\,س}{لو\,ص}$ والعكس صحيح

مثلا $لو_{٢}\,٣ = \frac{لو\,٣}{لو\,٢}$

(٦) $لو_{ص}\,س = \frac{١}{لو_{س}\,ص}$ (خاصية المعكوس الضربي)

مثلا $لو_{٧}\,٥ = \frac{١}{لو_{٥}\,٧}$

مثال بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

(١) $لو_{٣} ١٥ + لو_{٣} ٦ - لو_{٣} ١٠$ (٢) $لو_{٥} ١٠٠ - ٣ لو_{٥} ٢ - لو_{٥} ١٨ + لو_{٥} ٣٦$

الحل

(١) ∵ المقدار $= لو_{٣}(١٥ \times ٦) - لو_{٣} ١٠ = لو_{٣} \frac{٩٠}{١٠} = لو_{٣} ٩ = ٢$

(٢) المقدار $= لو_{٥} ١٠٠ + لو_{٥} ٣٦ - (٣ لو_{٥} ٢ + لو_{٥} ١٨)$

$= (لو_{٥} ١٠٠ + لو_{٥} ٣٦) - (لو_{٥} ٨ + لو_{٥} ١٨)$

$= لو_{٥} ٣٦٠٠ - لو_{٥}(١٨ \times ٨) = لو_{٥} \frac{٣٦٠٠}{١٨ \times ٨} = لو_{٥} ٢٥ = ٢$

مثال اوجد قيمة المقدار $\frac{لو_{٢} ٢٤٣ - لو_{٣} ٣٢}{لو_{٢} ٢٧ - لو_{٣} ٨}$

الحل

∵ المقدار $= \frac{لو_{٢}(٣)^{٥} - لو_{٣}(٢)^{٥}}{لو_{٢}(٣)^{٣} - لو_{٣}(٢)^{٣}} = \frac{٥ لو_{٢} ٣ - ٥ لو_{٣} ٢}{٣ لو_{٢} ٣ - ٣ لو_{٣} ٢}$

∴ المقدار $= \frac{٥(لو_{٢} ٣ - لو_{٣} ٢)}{٣(لو_{٢} ٣ - لو_{٣} ٢)} = \frac{٥}{٣}$

مثال أوجد في ابسط صورة

(١) $لو_{٢} \sqrt[٧]{٣٢}$ (٢) $\frac{١}{لو_{س} س ص ع} + \frac{١}{لو_{ص} س ص ع} + \frac{١}{لو_{ع} س ص ع}$

الحل

(1) ∵ $لو_{2} \sqrt[7]{32} = لو_{2} \sqrt[7]{(2)^{5}} = لو_{2} 2^{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7} لو_{2} 2 = \frac{5}{7}$

(2) المقدار $= لو_{س ص ع} س + لو_{س ص ع} ص + لو_{س ص ع} ع$

$= لو_{س ص ع} س ص ع = 1$

مثال

حل المعادلة $2 لو س - لو(س+2) = 0$

الحل

∵ $2 لو س - لو(س+2) = 0$ ∴ لابد أن تكون $س > 0$

∴ $لو س^{2} - لو(س+2) = 0 = لو\left(\frac{س^{2}}{س+2}\right) = صفر$

∴ $\frac{س^{2}}{س+2} = 10^{صفر} = 1$ ∴ $س^{2} - س - 2 = 0$

∴ $(س - 2)(س + 1) = 0$

منها $س + 1 = 0$ ∴ $س = -1$ مرفوض

أو $س - 2 = 0$ ∴ $س = 2$ ∴ م.ح $= \{2\}$

مثال

حل المعادلة $لو س + لو(س+2) = لو(س+6)$

الحل

مع ملاحظة أن لابد أن تكون $س > 0$

∵ $لو س + لو(س+2) = لو(س+6)$ ∴ $لو(س(س+2)) = لو(س+6)$

∴ $س(س+2) = س + 6$ ∴ $س^{2} + 2س - س - 6 = 0$

∴ $س^{2} + س - 6 = 0$ ∴ $(س + 3)(س - 2) = 0$

∴ $س + 3 = 0$ منها $س = -3$ مرفوض

أو $س - 2 = 0$ منها $س = 2$ ∴ م.ح $= \{2\}$

مثال حل المعادلة $\log_3(س^2-3س+2) - \log_3(س-2) = \log_7 49$

الحل

$\therefore \log_3 \frac{س^2-3س+2}{س-2} = 2$ منها $\frac{س^2-3س+2}{س-2} = 3^2$

$\therefore \frac{س^2-3س+2}{س-2} = 9$ $\therefore س^2 - 12س + 20 = 0$

$\therefore (س - 10)(س - 2) = 0$

منها $س = 2$ مرفوض لماذا ؟

$س = 10$ $\therefore$ م.ح = {10}

مثال

أوجد مجموعة حل المعادلة

(1) $\log \frac{س}{100} \times (\log س + 3) = 0$ (2) $س^{\log س} = 10$

الحل

(1) $\because \log \frac{س}{100} \times (\log س + 3) = 0$ $\therefore (\log س - \log 100)(\log س + 3) = 0$

$\therefore (\log س - 2)(\log س + 3) = 0$ منها

إما $\log س - 2 = 0$ $\therefore \log س = 2$ $\therefore س = 10^2 = 100$

أو $\log س + 3 = 0$ $\therefore \log س = -3$ $\therefore س = 10^{-3} = 0.001$

$\therefore$ م.ح = {100 ، 0.001}

(2) $\because س^{\log س} = 10$ بأخذ لوغاريتم الطرفين $\therefore \log س \log س = 1$

$\therefore (\log س)^2 = 1$ $\therefore \log س = \pm 1$

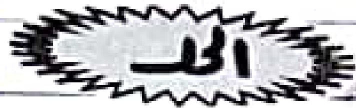
عندما $\log س = 1$ فإن $س = 10$

عندما $\log س = -1$ فإن $س = 0.1$

$\therefore$ م.ح = {10 ، 0.1}

مثال: أوجد مجموعة حل المعادلة

(١) (س)$^{\text{لو}_٢ \text{س}}$ = ٤ س   (٢) لو ٤٩ × لو $\sqrt{٨}$ = لو ٣٤٣ × لو س^{٢}



(١) ∵ (س)$^{\text{لو}_٢ \text{س}}$ = ٤ س   بأخذ لو$_٢$ للطرفين

∴ لو$_٢$ س لو$_٢$ س = لو$_٢$ ٤ س   ∴ (لو$_٢$ س)^{٢} = لو$_٢$ ٤ + لو$_٢$ س

∴ (لو$_٢$ س)^{٢} − لو$_٢$ س − ٢ = ٠   ∴ (لو$_٢$ س − ٢)(لو$_٢$ س + ١) = ٠

منها لو$_٢$ س = ٢   ∴ س = ٤   أو لو$_٢$ س = −١   ∴ س = $\frac{١}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{١}{٢}$ ، ٤}

(٢) ∵ لو ٤٩ × لو $\sqrt{٨}$ = لو ٣٤٣ × لو س^{٢}

∴ لو ٧^{٢} × لو (٢)$^{\frac{٣}{٢}}$ = لو ٧^{٣} × ٢ لو س

∴ ٢ لو ٧ × $\frac{٣}{٢}$ لو ٢ = ٣ لو ٧ × ٢ لو س

∴ لو ٢ = ٢ لو س ⟵ ∴ لو ٢ = لو س^{٢} منها

س^{٢} = ٢   ∴ س = −$\sqrt{٢}$ تحقق المعادلة

س = $\sqrt{٢}$ تحقق المعادلة

∴ م.ح = {−$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$}

ملاحظات هامة

(١) اذا كانت $س = أ^{لو_{أ} ص}$ فان $س = ص$

(٢) $لو_{ب} أ \times لو_{أ} جـ = لو_{ب} جـ$

(٣) $لو_{أ} ب = لو_{أ^{ن}} ب^{ن}$

مثال أكمل ما يأتي

(١) اذا كانت $س = ٣^{لو_{٣} ٥}$ فان $س = \dots$

(٢) $لو_{٢} ٥ \times لو_{٣} ٢ = \dots\dots$

(٣) $لو_{أ} ب = لو_{أ^{٢}} \dots = لو_{\dots} ب^{٣}$

الحل

(١) $\because س = ٣^{لو_{٣} ٥}$ ← $\therefore س = ٥$

(٢) $لو_{٢} ٥ \times لو_{٣} ٢ = لو_{٣} ٥$

(٣) $لو_{أ} ب = لو_{أ^{٢}} ب^{٢} = لو_{أ^{٣}} ب^{٣}$

مثال اوجد مجموعة حل المعادلة

(١) $لو_{٣} س \times لو_{٩} س = ٢$ (٢) $لو_{٣} س + لو_{٩} س^{٢} = -٣$

الحل

(1) ∵ $لو_{3}$ س × $لو_{9}$ س = ٢   بفرض أن $لو_{9}$ س = ص

∴ س = $٩^{ص}$ = $٣^{٢ص}$ بالتعويض في ① المعادلة

∴ $لو_{3}$ $٣^{٢ص}$ × $لو_{9}$ $٩^{ص}$ = ٢   ∴ ٢ص × ص = ٢

∴ $ص^{٢}$ = ١   ∴ ص = ±١   بالتعويض في ①

∴ عند ص = ١ فإن س = ٩

عند ص = −١ فإن س = $٩^{-١}$ = $\frac{١}{٩}$

∴ م.ح = {٩ ، $\frac{١}{٩}$}

(2) ∵ $لو_{3}$ س + $لو_{9}$ $س^{٢}$ = −٣   بفرض أن $لو_{9}$ $س^{٢}$ = ص ①

∴ $س^{٢}$ = $٩^{ص}$ ⟸ ∴ س = ± $٣^{ص}$

ولكن س = − $٣^{ص}$ مرفوض لماذا

∴ س = $٣^{ص}$ بالتعويض في المعادلة

∴ $لو_{3}$ $٣^{ص}$ + ص = −٣   ∴ ٢ص = −٣   ∴ ص = $\frac{-٣}{٢}$ ②

بالتعويض في ①   ∴ $لو_{9}$ $س^{٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

∴ $س^{٢}$ = $٩^{\frac{-٣}{٢}}$ ⟸ ∴ $س^{٢}$ = $(٣^{٢})^{\frac{-٣}{٢}}$ = $٣^{-٣}$

∴ $س^{٢}$ = $\frac{١}{٢٧}$ منها س = $\frac{-١}{\sqrt{٢٧}}$ مرفوض لماذا؟

س = $\frac{١}{\sqrt{٢٧}}$ ✓

∴ م.ح = {$\frac{١}{\sqrt{٢٧}}$}

* حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات

مثال

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية

(١) $٥^{س} = ١٧$ (٢) $٥^{س+١} = ٢^{٤س-٣}$

(٣) $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$

الحل

(١) ∵ $٥^{س} = ١٧$ بأخذ لوغاريتم الطرفين (log) ∴ س لو٥ = لو١٧

∴ $س = \frac{لو١٧}{لو٥}$ ⟸ باستخدام الحاسبة س ≈ ١٫٧٦

∴ م.ح = {١٫٧٦}

(٢) ∵ $٥^{س+١} = ٢^{٤س-٣}$ ⟵ ∴ (س+١) لو٥ = (٤س-٣) لو٢

∴ $\frac{س+١}{٤س-٣} = \frac{لو٢}{لو٥} ≈ ٠٫٤٣$ ∴ س+١ = ٠٫٤٣ (٤س-٣)

∴ س+١ = ١٫٧٢ س - ١٫٢٩ ومنها $س = \frac{٣١}{٨}$ ∴ م.ح = $\{\frac{٣١}{٨}\}$

(٣) ∵ $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$ ∴ $(٣^{س} - ٩)(٣^{س} - ٥) = ٠$

∴ $٣^{س} = ٩ = ٣^{٢}$ ومنها س = ٢ ①

أو $٣^{س} = ٥$ ⟵ س لو٣ = لو٥

∴ $س = \frac{لو٥}{لو٣} ≈ ١٫٤٦$ ②

من ① ، ② ∴ م.ح = {٢ ، ١٫٤٦}

الشرح الوافى

التفاضل وحساب المثلثات

للصف الثانى الثانوى

الفصل الدراسى الاول

من اعداد أ/ على حمدون

معلم أول بمعهد/ بنى عدى الثانوى

بنين

أولا النهايات

١- ايجاد نهاية دالة بيانيا
٢- ايجاد نهاية دالة جبريا
٣- نظرية (٤) ونتائجها
٤- نهاية دالة عند اللانهاية
٥- نهاية الدوال المثلثية
٦- نهاية دالة معرفة باكثر من قاعدة

ثانيا الاتصال

١- اتصال دالةعند نقطة
٢- اتصال دالة على فترة

النهايات

* مفاهيم هامة :-

(١) الكمية المعينة هي التي لها جواب محدد مثل $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٧}{٤}$ ، ......

(٢) الكمية الغير معرفة :- هي كمية ليس لها معنى مثل $\frac{٣}{صفر}$ لانه لا يوجد عدد حقيقي اذا ضرب × صفر كان الناتج = ٣

وبصفة عامة الكمية غير المعرفة = $\frac{أ}{صفر}$ حيث أ ∈ ح - {٠}

(٣) الكمية الغير معينة :- هي الكمية التي ليس لها جواب محدد مثل $\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، صفر × ∞ ، (صفر)^{صفر} ، $(\infty)^{صفر}$ ، $(١)^{\infty}$

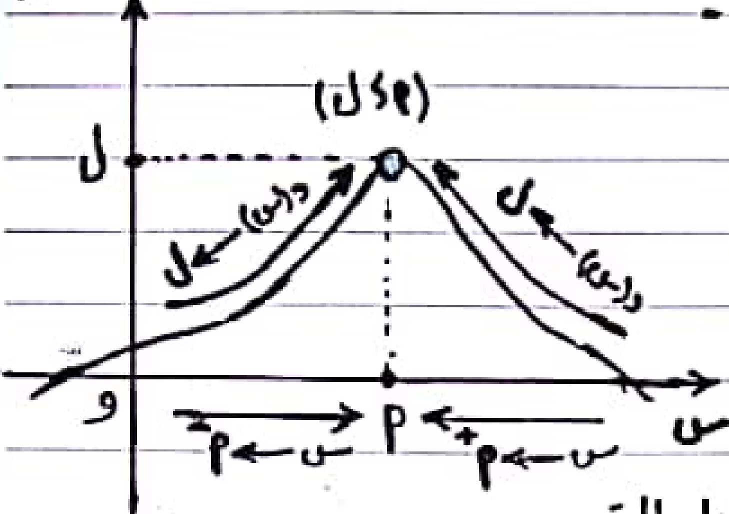
(٤) $\infty \pm أ = \infty$ ، $-\infty \pm أ = -\infty$

(٥) $\infty \times أ =$
- ∞ عندما أ > ٠
- $-\infty$ عندما أ < ٠
- كمية غير معينة عندما أ = ٠

(٦) $-\infty \times أ =$
- $-\infty$ عندما أ > ٠
- ∞ عندما أ < ٠
- كمية غير معينة عندما أ = ٠

(٧) اذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ فان مجال الدالة = ح - {٠}
∴ د(٠) = $\frac{١}{صفر}$ كمية غير معرفة لذلك لا نستطيع ايجاد قيمة الدالة عند س = ٠ ولكن يمكن ايجاد قيمتها عندما تقترب س قرباً نهائياً من الصفر (س ← ٠)

* النهاية اليمنى للدالة :-



من الملاحظ أن في الشكل المقابل يمثل الشكل البياني لمنحنى دالة ما

* كلما اقتربت قيمة س من أ من ناحية اليمين فإن قيمة الدالة تقترب من (ل) لذلك تسمى ل النهاية اليمنى للدالة عندما س تؤول الى أ وتكتب على الصورة $د(أ^{+}) = \underset{س \leftarrow أ^{+}}{نهـا} د(س) = ل$

* النهاية اليسرى للدالة :-

ومن الملاحظ أيضاً كلما اقتربت س من أ من ناحية اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من (ل) لذلك تسمى ل بالنهاية اليسرى للدالة عندما س ← $أ^{-}$ وتكتب على الصورة $د(أ^{-}) = \underset{س \leftarrow أ^{-}}{نهـا} د(س) = ل$

* نهاية دالة عند نقطة :-

يكون للدالة د(س) نهاية عند نقطة أ إذا كانت

$د(أ^{+}) = د(أ^{-}) = ل$ وتكون ل هي قيمة النهاية عندما س = أ أو س ← أ وتكتب على الصورة

$$\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د(س) = ل$$

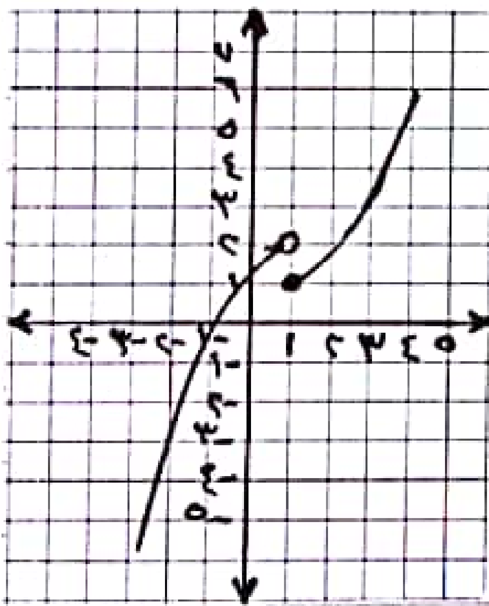
أما اذا كانت $د(ﻫ^+) \neq د(ﻫ^-)$ فان

$\lim_{س \to ﻫ}$ د(س) تكون غير موجودة

ملاحظات هامة عند ايجاد نهاية الدالة د(س) عند نقطة (ﻫ) نلاحظ الآتى

* لابد أن تكون الدالة معرفة فى جوار نقطة (ﻫ) أى يكون للدالة مجال على يمين وعلى يسار (ﻫ)
* نهاية دالة عند نقطة لا يلزم تعريفها عند هذه النقطة
* اذا كانت ﻫ نقطة حدية فى مجال الدالة د(س) فإن $\lim_{س \to ﻫ}$ د(س) تكون غير موجودة

* ايجاد نهاية دالة بيانياً :-



مثال

* فى الشكل المقابل نجد أن

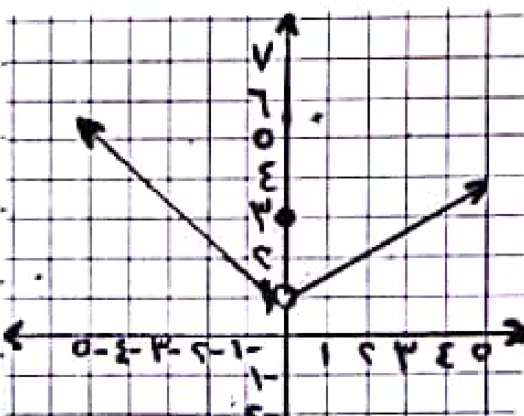
(١) د(١) = ١

(٢) $د(١^+) = ١$

(٣) $د(١^-) = ٢$

$\therefore د(١^+) \neq د(١^-)$

$\therefore \lim_{س \to ١}$ د(س) غير موجودة



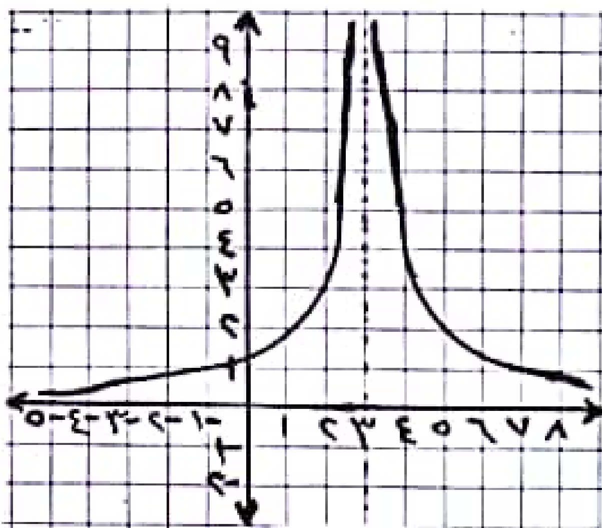
* فى الشكل المقابل :-

(١) د(٠) = ٣

$د(٠^+) = ١$

$د(٠^-) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠}$ د(س) = ١



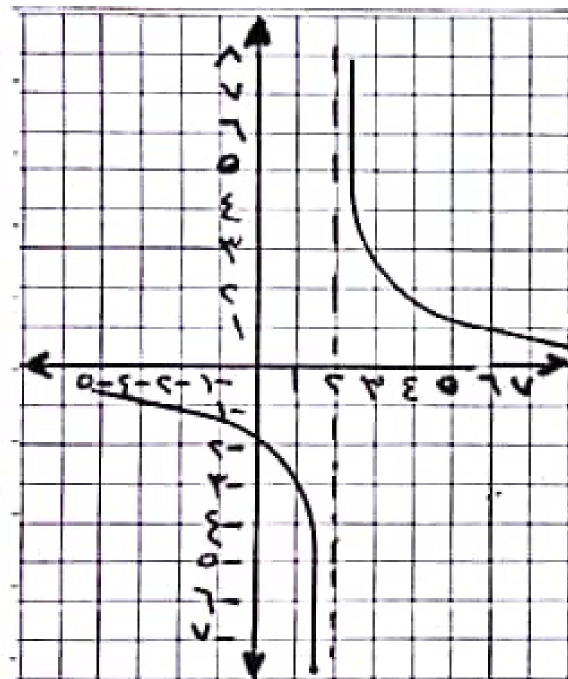
* في الشكل المقابل :

(١) د(٣) غير موجودة

(٢) $د(٣^+) = \infty$

(٣) $د(٣^-) = \infty$

(٤) ∴ $\lim_{س \to ٣} د(س) = \infty$ ،



* في الشكل المقابل :

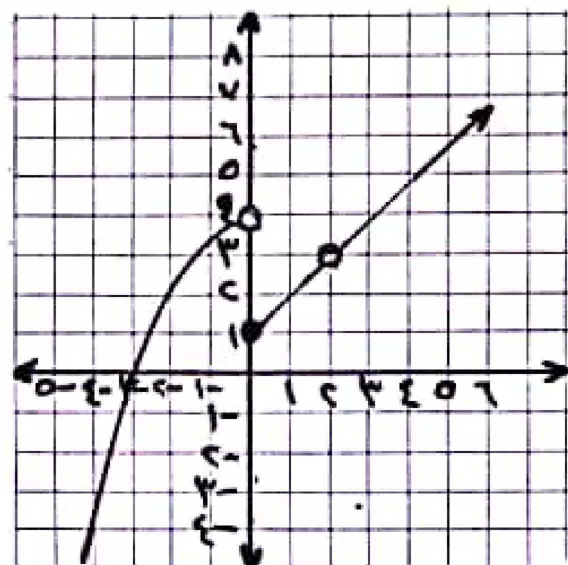
(١) د(٢) غير موجودة

(٢) $د(٢^+) = \infty$

(٣) $د(٢^-) = -\infty$

∴ $د(٢^+) \neq د(٢^-)$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة



* في الشكل المقابل :

(١) $د(٠) = ١$

(٢) $د(٠^+) = ١$

(٣) $د(٠^-) = ٤$

(٤) ∴ $د(٠^+) \neq د(٠^-)$

∴ $\lim_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة

(٥) $د(٢^+) = د(٢^-) = ٣$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س) = ٣$

إيجاد نهاية دالة جبريا

نظرية (١) اذا كانت الدالة د(س) دالة كثيرة حدود معرفة في جوار نقطة (أ) فان:

$\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ) (تعويض مباشر)

* نتيجة :-
اذا كانت د(س) دالة ثابتة حيث د(س) = ك فانه

$\lim_{س \to أ}$ د(س) = ك

مثال أوجد النهايات الاتية

(١) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١)

(٢) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١) حيث س ∈]٢ ، ∞[

(٣) $\lim_{س \to -٣}$ (٥)

الحل

(١) ∵ د(س) = ٣س + ١ ∴ مجالها = ح
∴ الدالة معرفة في جوار س = ٢
∴ $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١) = د(٢) = ٧

(٢) ∵ مجال الدالة د(س) = ٣س + ١ يساوي]٢ ، ∞[
∴ س = ٢ نقطة حدية ∴ $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١) = غير موجودة

(٣) $\lim_{س \to -٣}$ (٥) = ٥ (دالة ثابتة)

نظرية (٢) اذا كانت د ، ر دالتين في المتغير س وكان $\lim_{س \to ﺃ}$ د(س) = ل

و $\lim_{س \to ﺃ}$ ر(س) = م فإن :

(١) $\lim_{س \to ﺃ}$ [د(س) ± ر(س)] = $\lim_{س \to ﺃ}$ د(س) ± $\lim_{س \to ﺃ}$ ر(س) = ل ± م

أي أن نهاية مجموع دالتين = المجموع الجبري لنهايتيهما

(٢) $\lim_{س \to ﺃ}$ [د(س) × ر(س)] = $\lim_{س \to ﺃ}$ د(س) × $\lim_{س \to ﺃ}$ ر(س) = ل × م

أي أن نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب النهايتين

(٣) اذا كان ك عدد ثابت فإن :

$\lim_{س \to ﺃ}$ ك د(س) = ك $\lim_{س \to ﺃ}$ د(س) = ك × ل

(٤) $\lim_{س \to ﺃ}$ $\frac{د(س)}{ر(س)}$ = $\frac{ل}{م}$ بشرط م ≠ ٠

(٥) $\lim_{س \to ﺃ}$ $[د(س)]^{ن}$ = $[\lim_{س \to ﺃ} د(س)]^{ن}$ = $(ل)^{ن}$

ملاحظة

اذا كانت $\lim_{س \to ﺃ}$ د(س) = كمية غير معرفة

فإن نهاية الدالة تكون غير معرفة وفي هذه الحالة نلجأ الى الطريقة البيانية لتحديد ما إذا كانت

$\lim_{س \to ﺃ}$ د(س) = ∞ أو $\lim_{س \to ﺃ}$ د(س) غير موجودة

* ما يراعى عند إيجاد نهاية دالة :-

عند إيجاد $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د(س) يجب أن نراعي الآتي :-

(١) معرفة مجال الدالة د(س) (ولو بمجرد النظر) فإذا كانت (أ) نقطة حدية في مجال الدالة فإن :
$\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د(س) تكون غير موجودة

(٢) إذا كانت الدالة معرفة في جوار (أ) نستخدم التعويض المباشر في قاعدة الدالة فإذا كان :-

* الناتج كمية معينة ← تكون هذه الكمية هي نهاية الدالة
* الناتج كمية غير معرفة ← فإن نهاية الدالة تكون غير معرفة ونلجأ إلى الحل البياني في هذه الحالة لمعرفة ما إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د(س) = ∞ أو $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د(س) غير موجودة
* الناتج كمية غير معينة فإن الدالة يكون لها نهاية ولكن لابد من اختزال العامل الصفري بإحدى الطرق المناسبة (تحليل - قسمة - ضرب في المرافق ......)

مثال أوجد النهايات الآتية

(١) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{س - ٣}{س + ٣}$ (٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ (-٥)

(٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{س^٢ - س}{س}$ (٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{١}{س^٢}$

الحل

(١) ∵ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س-٣}{س+٣} = \frac{٠-٣}{٠+٣} = -١$ (كمية معينة)

(٢) ∵ $\lim\limits_{س \to ٢} (-٥) = -٥$ (نهاية العدد الثابت = العدد الثابت)

(٣) ∵ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^٢-س}{س} = \frac{٠}{٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

∴ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س(س-١)}{س} = \lim\limits_{س \to ٠} (س-١) = -١$

(٤) ∵ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢} = \frac{١}{\text{صفر}}$ كمية غير معرفة أى أن النهاية

غير معرفة لذلك نلجأ الى الحل البيانى

ومن الشكل البيانى

لمنحنى الداله نجد أن

$د(٠^+) = \lim\limits_{س \to ٠^+} \frac{١}{س^٢} = \infty$ ①

$د(٠^-) = \lim\limits_{س \to ٠^-} \frac{١}{س^٢} = \infty$ ②

∴ من ①، ② ينتج أن

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢} = \infty$

مثال

أوجد النهايات الاتية

(١) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢-٢س}{س^٢-س-٢}$ (٢) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢+٤س+٣}{س^٢-٩}$

الحل

(١) ∵ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢-٢س}{س^٢-س-٢} = \frac{٤-٤}{٤-٢-٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

وباستخدام التحليل ينتج

$$\lim_{س \to 2} د(س) = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-2)}{(س-2)(س+1)}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{س}{س+1} = \frac{2}{3}$$

(4) $\because \lim_{س \to -3} \frac{س^2+4س+3}{س^2-9} = \lim_{س \to -3} \frac{(س+3)(س+1)}{(س+3)(س-3)}$

$$\therefore \lim_{س \to -3} د(س) = \lim_{س \to -3} \frac{س+1}{س-3} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

مثال أوجد النهايات الآتية :

(1) $\lim_{س \to -2} \frac{س^2+4س+4}{س^3+س^2-8س-12}$ (2) $\lim_{س \to 9} \frac{س+7\sqrt{س}-12}{س-9}$

الحل

(1) البسط مقدار ثلاثي بسيط سهل التحليل $= (س+2)(س+2)$

اما المقام نستخدم القسمة التركيبية لتحليله كالاتي

① نرتب المقدار ترتيباً تنازلياً $س^3+س^2-8س-12$

$\because س \leftarrow -2$

	1	1	-8	-12
-2	↓	-2	2	12
	1	-1	-6	•

$\therefore$ العامل الصفري $= (س+2)$

1 ← معامل $س^2$ ، -1 ← معامل س ، -6 ← الحد المطلق ، • ← هو باقي القسمة

$$\therefore س^3+س^2-8س-12 = (س+2)(س^2-س-6)$$

$$\therefore \lim_{س \to -2} د(س) = \lim_{س \to -2} \frac{(س+2)(س+2)}{(س+2)(س^2-س-6)}$$

$$= \lim_{س \to -2} \frac{س+2}{س^2-س-6} = \frac{صفر}{4+2-6} = \frac{صفر}{صفر}$$ كمية غير معينة

∴ بالتحليل مرة آخرى

$$\therefore \underset{س \to -2}{\text{نهــا}}\ \text{د}(س) = \underset{س \to -2}{\text{نهــا}} \frac{س+2}{(س+2)(س-3)} = \frac{1}{-5} = \frac{-1}{5}$$

$$(2) \because \underset{س \to 9}{\text{نهــا}} \frac{س + \sqrt{س} - 12}{س-9} = \underset{س \to 9}{\text{نهــا}} \frac{س - 9 + \sqrt{س} - 3}{س-9}$$

$$= \underset{س \to 9}{\text{نهــا}} \left[\frac{س-9}{س-9} + \frac{\sqrt{س} - 3}{(\sqrt{س} - 3)(\sqrt{س} + 3)} \right]$$

$$= \underset{س \to 9}{\text{نهــا}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{س} + 3} \right] = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

مثال أوجد النهايات الآتية :-

$$(1)\ \underset{س \to -1}{\text{نهــا}} \frac{س+1}{\sqrt{س+5} - 2} \qquad (2)\ \underset{س \to 5}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س-1} - 2}{س-5}$$

الحل

(1) بالضرب × مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{س \to -1}{\text{نهــا}}\ \text{د}(س) = \underset{س \to -1}{\text{نهــا}} \left(\frac{س+1}{\sqrt{س+5} - 2} \times \frac{\sqrt{س+5} + 2}{\sqrt{س+5} + 2} \right)$$

$$= \underset{س \to -1}{\text{نهــا}} \left(\frac{(س+1)(\sqrt{س+5} + 2)}{س+5 - 4} \right)$$

$$= \underset{س \to -1}{\text{نهــا}} (\sqrt{س+5} + 2) = 2 + 2 = 4$$

(2) بالضرب × مرافق البسط بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{س \to 5}{\text{نهــا}}\ \text{د}(س) = \underset{س \to 5}{\text{نهــا}} \left[\frac{\sqrt{س-1} - 2}{س-5} \times \frac{\sqrt{س-1} + 2}{\sqrt{س-1} + 2} \right]$$

$$= \underset{س \to 5}{\text{نهــا}} \left[\frac{س-5}{(س-5)(\sqrt{س-1} + 2)} \right] = \frac{1}{4}$$

مثال أوجد النهايات الآتية

(١) $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س - ١}$ (٢) $\lim_{س \to ١} \sqrt{س - ١}$

(٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{(س - ١)^٢}$ (٤) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{٤ - س^٢}$

الحل

(١) ∵ مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س - ١}$ هو $[١ ، \infty[$

∴ س = ٥ ليست نقطة حدية في مجال الدالة

∴ $\lim_{س \to ٥} د(س) = \lim_{س \to ٥} \sqrt{س - ١} = \sqrt{٤} = ٢$

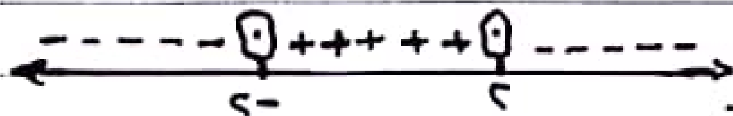
(٢) ∵ مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س - ١}$ هو $[١ ، \infty[$

∴ س = ١ نقطة حدية ∴ $\lim_{س \to ١} \sqrt{س - ١}$ غير موجودة

(٣) ∵ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{(س - ١)^٢} = \lim_{س \to ١} \frac{(س + ٣)(س - ١)}{(س - ١)^٢}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س + ٣}{س - ١} = \frac{٤}{صفر}$ ∴ النهاية غير موجودة

(٤) إيجاد مجال الدالة



∴ مجال الدالة $د(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$

$= [-٢ ، ٢]$

∴ س = ٢ نقطة حدية في مجال الدالة

∴ $\lim_{س \to ٢} \sqrt{٤ - س^٢}$ غير موجودة

يمكن أن نقول

اذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ل}$

حيث ق(س) دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (س² + ب س + جـ)

(١) ق(أ) = صفر

(٢) ق(س) = (س − أ)(س − أ + ل)

اى أن دالة البسط = العامل الصفرى × (العامل الصفرى + النهاية)

مثال

(١) اذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{أ}}{\text{س} + ١} = ٤$ فان أ = ...

(٢) اذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{د(س)} - ٥}{\text{س} - ٢} = ١$ فان $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \text{د(س)} = ...$

(٣) اذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ + \text{أس} + \text{ب}}{\text{س} - ١} = ٥$ فان أ = ...، ب = ...

الحل

(١) ∵ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{أ}}{\text{س} + ١} = ٤$ ⟸ ∴ د(٢) = ٤ ∴ $\frac{\text{أ}}{٣} = ٤$ ⟸ أ = ١٢

(٢) ∵ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{د(س)} - ٥}{\text{س} - ٢} = ١$ لها نهاية ∴ د(٢) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ د(س) − ٥ = ٠ منها د(س) = ٥ ⟸ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \text{د(س)} = ٥$

(٣) ∵ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ + \text{أس} + \text{ب}}{\text{س} - ١} = ٥$

∴ س² + أس + ب = (س − ١)(س − ١ + ٥)

∴ س² + أس + ب = (س − ١)(س + ٤)

∴ س² + أس + ب = س² + ٣س − ٤ وبمقارنة المعاملات

أ = ٣ ، ب = −٤

نظرية (٤) (القانون) ونتائجها

« نظرية (٤) :- بدون برهان

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\, أ^{ن-1}$$ لكن $ن \in ح - \{٠\}$

نتائج على نظرية (٤) :-

(١) $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م}\, أ^{ن-م}$ حيث $ن ، م \in ح - \{٠\}$

(٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + أ)^{ن} - أ^{ن}}{س} = ن\, أ^{ن-1}$

مثال أوجد النهايات الآتية

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$ (٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٣} - ٨}$

(٣) $\lim_{س \to -٥} \frac{س^{٤} - ٦٢٥}{س + ٥}$ (٤) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س^{٥} + ٢٤٣}$

الحل

(١) ∵ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - (٢)^{٥}}{س - ٢} = ٥ \times ٢^{٤} = ٨٠$

(٢) ∵ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٣} - ٨} = \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - (٢)^{٥}}{س^{٣} - (٢)^{٣}} = \frac{٥}{٣} \times ٢^{٢} = \frac{٢٠}{٣}$

(٣) ∵ $\lim_{س \to -٥} \frac{س^{٤} - ٦٢٥}{س + ٥} = \lim_{س \to -٥} \frac{س^{٤} - (٥)^{٤}}{س - (-٥)}$

$= \lim_{س \to -٥} \frac{س^{٤} - (-٥)^{٤}}{س - (-٥)} = ٤ \times (-٥)^{٣} = -٥٠٠$

(٤) ∵ $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س^{٥} + ٢٤٣} = \lim_{س \to -٣} \frac{س^{٤} - (-٣)^{٤}}{س^{٥} - (-٣)^{٥}} = \frac{٤}{٥} \times (-٣)^{-١} = -\frac{٤}{١٥}$

مثال أوجد النهايات الآتية :

(١) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{١ - \text{س}^{٩}}{\text{س}^{٧} - ١}$ (٢) $\text{نها}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{(٣ + \text{هـ})^{٤} - ٨١}{\text{هـ}}$

(٣) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{(١ + ٤\text{س})^{٨} - ١}{\text{س}}$ (٤) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{(\text{س} + ٢)^{٥} - ٣٢}{٦\text{س}}$

الحل

(١) ∵ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{١ - \text{س}^{٩}}{\text{س}^{٧} - ١} = \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{-(\text{س}^{٩} - ١)}{\text{س}^{٧} - ١}$

$= -\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}^{٩} - (١)^{٩}}{\text{س}^{٧} - (١)^{٧}} = \frac{-٩}{٧} \times ١^{٢} = \frac{-٩}{٧}$

(٢) ∵ $\text{نها}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{(٣ + \text{هـ})^{٤} - ٨١}{\text{هـ}} = \text{نها}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{(٣ + \text{هـ})^{٤} - (٣)^{٤}}{\text{هـ}} = ٤ \times ٣^{٣}$

(٣) ∵ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{(١ + ٤\text{س})^{٨} - ١}{\text{س}} =$ بالضرب بسطاً ومقاماً × ٤

∴ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \text{د}(\text{س}) = ٤ \, \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{(٤\text{س} + ١)^{٨} - (١)^{٨}}{٤\text{س}} = ٨ \times (١)^{٧} = ٨$

(٤) ∵ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{(\text{س} + ٢)^{٥} - ٣٢}{٦\text{س}} = \frac{١}{٦} \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{(\text{س} + ٢)^{٥} - (٢)^{٥}}{\text{س}}$

$= \frac{١}{٦} \times ٥ \times ٢^{٤} = ١٣\frac{١}{٣}$

مثال أوجد النهايات الآتية :

(١) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٢} \frac{(\text{س} + ٣)^{٥} - ١}{\text{س} + ٢}$ (٢) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -\frac{١}{٢}} \frac{٣٢\text{س}^{٥} + ١}{٦٤\text{س}^{٦} - ١}$

(٣) $\text{نها}_{٢\text{س} \leftarrow ١} \frac{١٢٨\text{س}^{٧} - ١}{٣٢\text{س}^{٥} - ١}$ (٤) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \sqrt{٢}} \frac{\text{س}^{٧} - ٨\sqrt{٢}}{\text{س}^{٢} - ٢}$

الحل

(1) ب $\lim\limits_{\text{س} \to -2} \dfrac{(\text{س}+3)^5 - 1}{\text{س}+2}$ = تعديل صورة الدالة لتصل إلى القانون

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to -2} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to -2} \dfrac{(\text{س}+3)^5 - 1}{(\text{س}+3) - 1}$ وذلك بإضافة وطرح 1

بعد مقام الدالة وتعديل شرط النهاية $\because$ $\text{س} \to -2$ ، $\text{س}+3 \to 1$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to -2} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{(\text{س}+3) \to 1} \dfrac{(\text{س}+3)^5 - (1)^5}{(\text{س}+3) - 1} = 5 \times (1)^4 = 5$

(2) بتعديل شرط النهاية $\because$ $\text{س} \to \frac{1}{2}$ منها $2\text{س} \to 1$
وبتعديل الدالة أيضاً

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{2\text{س} \to 1} \dfrac{(2\text{س})^5 - (1)^5}{(2\text{س})^6 - (1)^6} = \frac{5}{6} \times (1)^{-1} = \frac{5}{6}$

(3) $\therefore \lim\limits_{2\text{س} \to 1} \dfrac{128\text{س}^7 - 1}{32\text{س}^5 - 1} = \lim\limits_{2\text{س} \to 1} \dfrac{(2\text{س})^7 - (1)^7}{(2\text{س})^5 - (1)^5} = \frac{7}{5}$

(4) $\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \sqrt{2}} \dfrac{\text{س}^7 - 8\sqrt{2}}{\text{س}^2 - 2} = \lim\limits_{\text{س} \to \sqrt{2}} \dfrac{\text{س}^7 - (\sqrt{2})^7}{\text{س}^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{7}{2} \times (\sqrt{2})^5$
$= 14\sqrt{2}$

مثال أوجد النهايات الآتية :-

(1) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^3 - 1}{3\text{س}^2 + 2\text{س} - 5}$ (2) $\lim\limits_{2\text{س} \to 1} \dfrac{5\text{س}^4 - \frac{5}{16}}{2\text{س} - 1}$

(3) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(1 - 2\text{س})^5 - 1}{5\text{س}}$ (4) $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{(\text{س} - 2\text{هـ})^{17} - \text{س}^{17}}{51\text{هـ}}$

الحل

(1) $\therefore \lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^{17} - 1}{(\text{س} - 1)(3\text{س} + 5)} = \lim\limits_{\text{س} \to 1} \left[\dfrac{\text{س}^{17} - 1}{\text{س} - 1} \times \dfrac{1}{3\text{س} + 5} \right]$

$= 17 \times (1)^{16} \times \dfrac{1}{3 + 5} = \dfrac{17}{8}$

(٢) بالضرب بسطاً ومقاماً × $\frac{١٦}{٥}$

∴ $\lim\limits_{٢س \to ١} د(س) = \frac{٥}{١٦} \lim\limits_{٢س \to ١} \frac{١٦س^{٤} - ١}{٢س - ١}$

$= \frac{٥}{١٦} \lim\limits_{٢س \to ١} \frac{(٢س)^{٤} - (١)^{٤}}{٢س - ١} = \frac{٥}{١٦} \times ٤ \times ١^{٣} = \frac{٥}{٤}$

(٣) ∵ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(١-٢س)^{٥} - ١}{٥س}$ = بالضرب × $\frac{-٢}{٥}$ بسطاً ومقاماً

∴ $\lim\limits_{س \to ٠} د(س) = \frac{-٢}{٥} \lim\limits_{س \to ٠} \frac{(١-٢س)^{٥} - ١}{-٢س}$ وبإجراء تعديل مناسب

∴ $\lim\limits_{س \to ٠} د(س) = \frac{-٢}{٥} \lim\limits_{١-٢س \to ١} \frac{(١-٢س)^{٥} - ١}{(١-٢س) - ١} = \frac{-٢}{٥} \times ٥ = -٢$

(٤) بالضرب بسطاً ومقاماً × $\frac{-٢}{٥}$

∴ $\lim\limits_{هـ \to ٠} د(هـ) = \frac{-٢}{٥} \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(س-٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{-٢هـ}$

$= \frac{-٢}{٥} \lim\limits_{س-٢هـ \to س} \frac{(س-٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{(س-٢هـ) - س} = \frac{-٣٤}{٥} س^{١٦}$

مثال أجب عن الآتي

(١) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{م} - س^{ن}}{س^{م} - س^{ك}}$ = ...

(٢) إذا كان $\lim\limits_{س \to ك} \frac{س^{٥} - ك^{٥}}{س - ك} = ٨٠$ فإن ك = ...

(٣) إذا كان $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{ن} - ٦٤}{س - ٢} = ل$ أوجد قيمة ن ، ل

الحل

(١) بأخذ $س^{هـ}$ عامل مشترك من البسط و $س^{ء}$ عامل مشترك من المقام

$$\therefore \lim_{س \to ١} د(س) = \lim_{س \to ١} \left[\frac{س^{هـ}(س^{م-هـ} - ١)}{س^{ء}(س^{م-ء} - ١)} \right]$$

$$= \lim_{س \to ١} (س)^{هـ-ء} \times \lim_{س \to ١} \frac{س^{م-هـ} - (١)^{م-هـ}}{س^{م-ء} - (١)^{م-ء}} = ١ \times \frac{م-هـ}{م-ء}$$

$$= ١ \times \frac{م-هـ}{م-ء} \times (١)^{م-هـ-م+ء} = \frac{م-هـ}{م-ء}$$

(٢) $\therefore \lim_{س \to ك} \frac{س^{٥} - ك^{٥}}{س - ك} = ٨٠$

$\therefore ٥ \times (ك)^{٤} = ٨٠$ $\therefore (ك)^{٤} = ١٦ \Leftarrow ك = \pm ٢$

(٣) $\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س^{ن} - ٦٤}{س - ٢} = ل$ النهاية

$\therefore د(٢) = \frac{صفر}{صفر}$ $\Leftarrow \therefore (٢)^{ن} - ٦٤ = ٠$

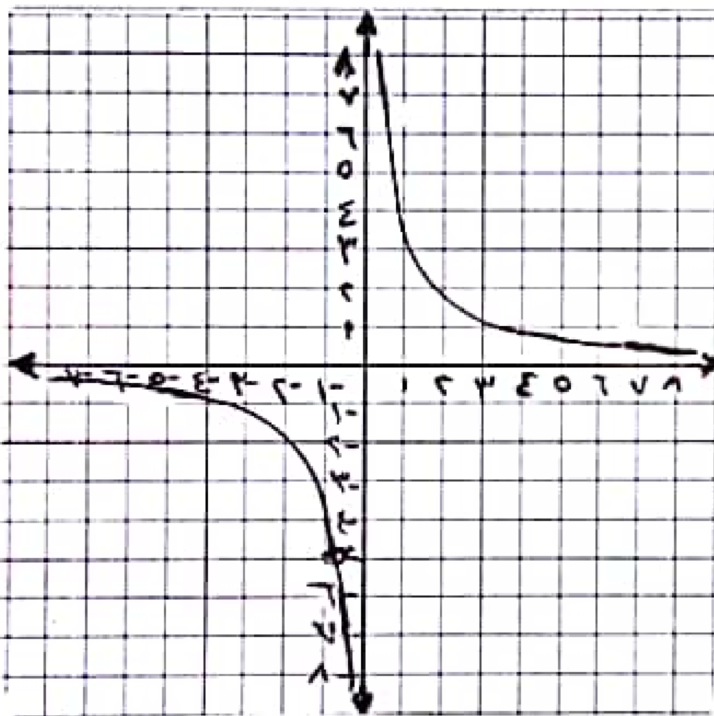
$\therefore ٢^{ن} = (٢)^{٦} \Leftarrow$ $\boxed{ن = ٦}$

$$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٦} - (٢)^{٦}}{س - ٢} = ل$$

$\therefore ٦ \times (٢)^{٥} = ل \Leftarrow ل = ١٩٢$

نهاية دالة عند اللانهاية

المقصود ببحث نهاية دالة عند اللانهاية هو التعرف على سلوك هذه الدالة عندما يكبر المتغير كبراً بلا حد فإذا فرضنا أن د(س) = $\frac{1}{س}$ والمطلوب ايجاد نهــا د(س) عندما س ← ∞ وباستخدام الحل البياني نجد أن



عندما س ← ∞

فإن د(س) ← صفر

عندما س ← - ∞

فإن د(س) ← صفر

وعلى ذلك يكون

$\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} = $ صفر

$\lim_{س \to -\infty} \frac{1}{س} = $ صفر

نظرية (٥) ونتائجها

نظرية (٥) :-

$\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} = $ صفر

نتائج هامة :- لكل أ ∈ ح ، ن ∈ ح+ يكون

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س} = $ صفر (٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^ن} = $ صفر

وعند ايجاد نهاية دالة كسرية عندما $س \to \infty$
وكان التعويض المباشر يعطي $\frac{\infty}{\infty}$ فاننا نقسم
كلاً من البسط والمقام على المتغير مرفوعاً لأعلى
قوة له في المقام ثم نستخدم النظرية أو النتيجة

مثال

أوجد كلاً من النهايات الآتية:

(1) $\text{نها}_{س \to \infty} (س^2 + 2س - 1)$ (2) $\text{نها}_{س \to \infty} (س^{-2} + 2س^{-1} - 1)$

(3) $\text{نها}_{س \to \infty} \left(\frac{3}{س^2} - 2\right)$ (4) $\text{نها}_{س \to \infty} (3)^{\frac{5}{س}}$

الحل

(1) $\because \text{نها}_{س \to \infty} (س^2 + 2س - 1) = (\infty + \infty - 1) = \infty$

(2) $\because \text{نها}_{س \to \infty} (س^{-2} + 2س^{-1} - 1) = \text{نها}_{س \to \infty} \left(\frac{1}{س^2} + \frac{2}{س} - 1\right)$

$= (0 + 0 - 1) = -1$

(3) $\because \text{نها}_{س \to \infty} \left(\frac{3}{س^2} - 2\right) = (\text{صفر} - 2) = -2$

(4) $\because \text{نها}_{س \to \infty} (3)^{\frac{5}{س}} = (3)^{\text{صفر}} = 1$

مثال

اوجد النهايات الآتية:

(1) $\text{نها}_{س \to \infty} \frac{س^2 + 3}{س^3 - 5}$ (2) $\text{نها}_{س \to \infty} \frac{2س^2 - 5}{3س + 8}$

(3) $\text{نها}_{س \to \infty} \sqrt{\frac{3 + 2س}{4س - 1}}$ (4) $\text{نها}_{س \to \infty} \frac{5 - 6س - 3س^2}{2س^2 + س + 4}$

(١) بقسمة البسط والمقام على $\text{س}^{٣}$

$$\because \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{٢}+٣}{\text{س}^{٣}-٥} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{١}{\text{س}}+\frac{٣}{\text{س}^{٣}}}{١-\frac{٥}{\text{س}^{٣}}} = \frac{\text{صفر}}{١} = \text{صفر}$$

(٢) بقسمة البسط والمقام على س

$$\because \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٢\text{س}^{٢}-٥}{٣\text{س}+٨} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٢\text{س}-\frac{٥}{\text{س}}}{٣+\frac{٨}{\text{س}}} = \frac{\infty}{٣} = \infty$$

(٣) بقسمة ما بداخل الجذر بسطاً ومقاماً على س

$$\because \lim_{\text{س}\to\infty} \sqrt{\frac{٣+٢\text{س}}{٤\text{س}-١}} = \lim_{\text{س}\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{٣}{\text{س}}+٢}{٤-\frac{١}{\text{س}}}} = \sqrt{\frac{٢}{٤}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

(٤) بقسمة كلاً من البسط والمقام على $\text{س}^{٢}$

$$\because \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٥-٦\text{س}-٣\text{س}^{٢}}{٢\text{س}^{٢}+\text{س}+٤} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{٥}{\text{س}^{٢}}-\frac{٦}{\text{س}}-٣}{٢+\frac{١}{\text{س}}+\frac{٤}{\text{س}^{٢}}} = \frac{-٣}{٢}$$

مثال أوجد النهايات الآتية

(١) $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٥+\text{س}^{٢}}{٣\text{س}^{٢}+١}$ (٢) $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{٢}-٢}{|\text{س}|^{٣}+١}$

(٣) $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{٣}-٤\text{س}+٥}{(٢\text{س}-١)^{٣}}$ (٤) $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(\text{س}+٢)^{٣}(٣-٢\text{س}^{٢})}{٣\text{س}(\text{س}^{٢}+٧)^{٢}}$

الحل

(١) ∵ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥ + \frac{١}{\text{س}^٢}}{\frac{٣}{\text{س}^٢} + ١} = \frac{٥}{١} = ٥$

(٢) ∵ $|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & \text{عندما س} \geq ٠ \\ -\text{س} & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$

∵ س ← ∞ ∴ $|\text{س}| = \text{س}$ حيث س > ٠

∴ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٢}{|\text{س}|^٣ + ١} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٢}{\text{س}^٣ + ١} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{\text{س}} - \frac{٢}{\text{س}^٣}}{١ + \frac{١}{\text{س}^٣}} = \text{صفر}$

(٣) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س} + ٥}{(٢\text{س} - ١)^٣}$ ∵ أكبر قوة للمتغير في المقام من الدرجة الثالثة

∴ بقسمة البسط والمقام على $\text{س}^٣$

∴ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{١ - \frac{٤}{\text{س}^٢} + \frac{٥}{\text{س}^٣}}{(٢ - \frac{١}{\text{س}})^٣} = \frac{١}{(٢)^٣} = \frac{١}{٨}$

(٤) ∵ أكبر قوة للمتغير في المقام هي الدرجة الخامسة

∴ بقسمة البسط والمقام على $\text{س}^٥$

∴ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{(١ + \frac{٢}{\text{س}})^٣ (\frac{٣}{\text{س}^٢} - ٢)}{٣ (١ + \frac{٧}{\text{س}^٢})^٢} = \frac{١ \times -٢}{١ \times ٣} = \frac{-٢}{٣}$

مثال أوجد النهايات الآتية

(١) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{(٧ + \sqrt{\text{س}})(٣ + \sqrt{\text{س}})}{٤\text{س} - ٣}$ (٢) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ + ١}}{\sqrt[٤]{\text{س}^٤ + ٢}}$

(٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{٨س^{٢}+١٤}}{\sqrt[٦]{س^{٤}-٣}}$ (٤) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{٢}+٥س} - س\right)$



(١) بالقسمة بسطاً ومقاماً على س حيث $س = \sqrt{س} \times \sqrt{س}$

$$\therefore \lim\limits_{س \to \infty} د(س) = \lim\limits_{س \to \infty} \frac{\left(\frac{٧}{\sqrt{س}}+١\right)\left(\frac{٣}{\sqrt{س}}+١\right)}{٤-\frac{٣}{س}}$$

$$= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{\left[\left(\frac{٤٩}{س}\right)^{\frac{١}{٢}}+١\right]\left[\left(\frac{٩}{س}\right)^{\frac{١}{٢}}+١\right]}{٤-\frac{٣}{س}} = \frac{١\times١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

(٢) بإخراج س عامل مشترك من البسط ومن المقام

$$\therefore \lim\limits_{س \to \infty} د(س) = \lim\limits_{س \to \infty} \frac{س\sqrt{١+\frac{١}{س^{٢}}}}{س\sqrt[٤]{١+\frac{٢}{س^{٤}}}} = ١$$

(٣) بإخراج س عامل مشترك من البسط ومن المقام

$$\therefore \lim\limits_{س \to \infty} د(س) = \lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{\frac{٢}{٣}}\sqrt[3]{٨+\frac{١}{س^{٢}}}}{س^{\frac{٤}{٦}}\sqrt[٦]{١-\frac{٣}{س^{٤}}}}$$

$$= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{\frac{٢}{٣}}\sqrt[3]{٨+\frac{١}{س^{٢}}}}{س^{\frac{٢}{٣}}\sqrt[٦]{١-\frac{٣}{س^{٤}}}} = \frac{\sqrt[3]{٨}}{\sqrt[٦]{١}} = \frac{٢}{١} = ٢$$

(٤) بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق البسط $\left(\sqrt{س^{٢}+٥س} - س\right)$

$$\therefore \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = \underset{س\to\infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{س^2+5س} - س\right) \times \frac{\sqrt{س^2+5س}+س}{\sqrt{س^2+5س}+س}$$

$$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{س^2+5س-س^2}{\sqrt{س^2+5س}+س}$$

$$\therefore \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = \underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{5س}{\sqrt{س^2+5س}+س}$$ بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = \underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{س}}+1} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$$

ملاحظات هامة إذا كانت ق(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود

(١) إذا كان $\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(س)}{\text{ر}(س)} = \text{ل}$ (لها نهاية)

فإن درجة دالة البسط ق(س) = درجة دالة المقام ر(س)

وتكون قيمة النهاية ل = $\frac{\text{معامل المتغير الذى له أكبر قوة فى البسط}}{\text{معامل المتغير الذى له أكبر قوة فى المقام}}$

(٢) إذا كان $\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(س)}{\text{ر}(س)} = \text{صفر}$ فإن درجة

دالة البسط ق(س) تكون أصغر من درجة دالة المقام ر(س)

(٣) إذا كان $\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(س)}{\text{ر}(س)} = \infty$ فإن درجة دالة

البسط ق(س) تكون أكبر من درجة دالة المقام ر(س)

(٤) إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[ن]{ق(س)}}{\sqrt[م]{ر(س)}} = ل$ فإن

فإن قيمة النهاية ل = $\frac{\sqrt[ن]{\text{معامل المتغير الذى له أكبر قوة فى ق(س)}}}{\sqrt[م]{\text{معامل المتغير الذى له أكبر قوة فى ر(س)}}}$

مثال

(١) اوجد قيمتى أ، ن اذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{٤أ س^{ن} - ٤س + ٥}{٣ - ٩س + ٨س^{٢}} = ٣$

(٢) اذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{أس^{٣} + ٣}}{\sqrt{٤س^{٢} + ٧}} = -١$ أوجد قيمة أ

(٣) اذا كانت د(س) = $\frac{٢ - أس^{٢}}{٣ - ن س + س^{٢}}$ وكانت

$\lim_{س \to \infty}$ د(س) = ٥ ، $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٢ أوجد قيمتى أ، ن

الحل

(١) ∵ الدالة لها نهاية عند س ← ∞

∴ درجة دالة البسط = درجة دالة المقام ⟸ ن = ٢

∴ قيمة النهاية = $\frac{٤أ}{٨}$ ∴ $\frac{٤أ}{٨} = ٣$ ⟸ أ = ٦

(٢) ∵ الدالة جذرية ولها نهاية عندما س ← ∞

∴ قيمة النهاية = $\frac{\sqrt[٣]{أ}}{\sqrt{٤}}$ ∴ $-١ = \frac{\sqrt[٣]{أ}}{٢}$ ⟸ أ = -٨

(٣) ∵ الدالة لها نهاية عندما س ← ∞

حيث $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ - أس^٢}{٣ - ب س + س^٢} = ٥ \Leftarrow ٥ = \frac{-أ}{١}$ ∴ $\boxed{أ = -٥}$

∴ $\lim_{س \to -٢} \frac{٢ + ٥س^٢}{٣ - ب س + س^٢} = ٢ \Leftarrow$ ∴ $د(-٢) = ٢$

∴ $\frac{٢ + ٢٠}{٣ + ٢ب + ٤} = ٢$ ∴ $\frac{٢٢}{٢ب + ٧} = ٢$ ∴ $٢ب = ٤$ ∴ $\boxed{ب = ٢}$

مثال

اذا كان $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^٢ + ١}{س + ١} - أس - ب \right) = ٢$ أوجد قيمتي أ، ب

الحل

بتوحيد المقامات للدالة

∴ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^٢ + ١}{س + ١} - \frac{أس(س + ١)}{س + ١} - \frac{ب(س + ١)}{س + ١} \right) = ٢$

∴ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^٢ + ١ - أس^٢ - أس - ب س - ب}{س + ١} \right) = ٢$

∴ $\lim_{س \to \infty} \left[\frac{(١ - أ)س^٢ - (أ + ب)س + (١ - ب)}{س + ١} \right] = ٢$

∵ الدالة لها نهاية عندما $س \to \infty$

∴ درجة البسط = درجة المقام $\Leftarrow$ ∴ الحد $(١ - أ)س^٢ = ٠$

∵ $س \to \infty \Leftarrow$ ∴ $١ - أ = ٠$ ومنها $\boxed{أ = ١}$ أولاً

∵ الدالة لها نهاية عندما $س \to \infty$ ∴ $٢ = \frac{-(أ + ب)}{١}$

∴ $٢ = -أ + ب \Leftarrow ب = ٢ + أ$ ومنها $\boxed{ب = ٣}$ ثانياً

نهاية الدوال المثلثية

* نظرية :-

اذا كانت س قياس زاوية بالتقدير الدائرى فإن :-

(١) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{حا} س}{س} = ١$ (٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{طا} س}{س} = ١$

* نتائج على النظرية :-

(١) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{حا} أس}{س} = أ$ ، $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{حا} أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

(٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{طا} أس}{س} = أ$ ، $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{طا} أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

(٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا} س}{س} = \text{صفر}$

* ملاحظات هامة :-

(١) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{حا} أس^ن}{س^ن} = أ$

(٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{حا}^ن أس}{س^ن} = \lim\limits_{س \to ٠} \left(\frac{\text{حا} أس}{س}\right)^ن = أ^ن$

مثال اوجد النهايات الاتية :

(١) $\lim\limits_{س \to ٠} \text{جتا} ٢س$ (٢) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \text{حا} س$

(٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{حا} ٢س}{٣س}$ (٤) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{طا} ٢\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$

الحل

(١) بالتعويض المباشر نجد أن نها_{س ← ٠} جتا ½ س = جتا ٠ = ١

(٢) نها_{س ← π/٢} جاس = جا π/٢ = ١

(٣) نها_{س ← ٠} جا٢س / ٣س = ٢/٣ (نتيجة)

(٤) نها_{س ← ٠} ظا٢√س / √س = نها_{√س ← ٠} ظا٢√س / √س = ٢/١ = ٢

مثال

أوجد النهايات الآتية

(١) نها_{س ← ٠} (١ - جتاس) / ٣س (٢) نها_{٢س ← ١} ظا(٢س - ١) / (٢س - ١)

(٣) نها_{س ← ٠} جا٢س² / س (٤) نها_{س ← ٠} جاس ظا٣س / ٤س²

الحل

(١) ∵ نها_{س ← ٠} (١ - جتاس) / ٣س = ⅓ نها_{س ← ٠} (١ - جتاس) / س = ⅓ × صفر = صفر

(٢) ∵ نها_{٢س ← ١} ظا(٢س - ١) / (٢س - ١) = نها_{٢س - ١ ← ٠} ظا(٢س - ١) / (٢س - ١) = ١

(٣) ∵ نها_{س ← ٠} جا٢س² / س = نها_{س ← ٠} [س × جا٢س² / س²] = صفر × ٢ = صفر

(٤) ∵ نها_{س ← ٠} جاس ظا٣س / ٤س² = نها_{س ← ٠} [¼ × جاس / س × ظا٣س / س]

∴ نها_{س ← ٠} د(س) = ¼ × ٢ × ٣ = ٣/٢

مثال أوجد النهايات الآتية

(١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س}}{\text{حا٣س}}$ (٢) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س} + \text{حا٣س}}{\text{طا٥س}}$

(٣) $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{حاس}}{\pi - \text{س}}$ (٤) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 + \text{حا٣س}}{\text{٥س جتا٢س}}$

الحل

(١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س}}{\text{حا٣س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{حا٣س}}{\text{٢س}}\right)^{-1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = \dfrac{2}{3}$

(٢) $\because \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س} + \text{حا٣س}}{\text{طا٥س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left[\dfrac{\text{٢س}}{\text{طا٥س}} + \dfrac{\text{حا٣س}}{\text{طا٥س}}\right]$

$\therefore \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{د(س)} = \dfrac{2}{5} + \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left[\dfrac{\text{حا٣س}}{\text{س}} \times \dfrac{\text{س}}{\text{طا٥س}}\right]$

$= \dfrac{2}{5} + \left\{\dfrac{3}{1} \times \dfrac{1}{5}\right\} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5} = 1$

(٣) $\because \underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{حاس}}{\pi - \text{س}} =$ من ضابط الثلاثات $\therefore \text{حا}(\pi - \text{س}) = \text{حاس}$

$\therefore \underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{حاس}}{\pi - \text{س}} = \underset{\pi - \text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}(\pi - \text{س})}{(\pi - \text{س})} = 1$

(٤) $\because \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 + \text{حا٣س}}{\text{٥س جتا٢س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left[\dfrac{1}{\text{جتا٢س}} \left(\dfrac{\text{س}^2}{\text{٥س}} + \dfrac{\text{حا٣س}}{\text{٥س}}\right)\right]$

$\therefore \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left[\dfrac{1}{\text{جتا٢س}} \left(\dfrac{\text{س}}{5} + \dfrac{\text{حا٣س}}{\text{٥س}}\right)\right] = 1 \times \left(0 + \dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3}{5}$

مثال أوجد النهايات الآتية

(١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{س طا٢س}}{\text{س}^2 + \text{حا}^2\text{٣س}}$ (٢) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا(س} - 1)}{\text{س}^2 + \text{س} - 2}$

(٣) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{٢س}^2 + \text{حا٣س}}{\text{٢س}^2 + \text{طا٦س}}\right)^4$ (٤) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{جتاس} + \text{حاس}}{1 - \text{جتاس} - \text{حاس}}$

الحل

(١) بالقسمة بسطاً ومقاماً على $س^٢$

$$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = \lim_{س \to ٠} \left[\frac{\frac{س طا ٢س}{س^٢}}{\frac{س^٢ + حا^٢ ٣س}{س^٢}} \right]$$

$$= \lim_{س \to ٠} \left[\frac{\frac{طا ٢س}{س}}{١ + \frac{حا^٢ ٣س}{س^٢}} \right] = \frac{٢}{١+(٣)^٢} = \frac{١}{٥}$$

(٢) $\therefore \lim_{س \to ١} د(س) = \lim_{س \to ١} \frac{حا(س-١)}{(س-١)(س+٢)}$

$$= \lim_{س-١ \to ٠} \frac{حا(س-١)}{(س-١)} \times \lim_{س \to ١} \frac{١}{س+٢} = ١ \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

(٣) بقسمة ما بداخل القوس بسطاً ومقاماً على س

$$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = \lim_{س \to ٠} \left[\frac{٢س + \frac{حا ٣س}{س}}{٢س + \frac{طا ٦س}{س}} \right] = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

(٤) بالقسمة بسطاً ومقاماً على س

$$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = \lim_{س \to ٠} \left[\frac{\frac{١-جتا س}{س} + \frac{حا س}{س}}{\frac{١-جتا س}{س} - \frac{حا س}{س}} \right] = \frac{٠+١}{٠-١} = -١$$

مثال

أوجد النهايات الآتية

(١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ - جتا ٣س - جتا ٤س}{س}$ (٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س^٢}$

(٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢س - \pi}{جتا س}$ (٤) $\lim_{س \to ١} \frac{حا \pi س}{١ - س}$

الحل

(١) ∵ $\underset{س \to 0}{\text{نها}}\ د(س) = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{جتا}3س + 1 - \text{جتا}4س}{س}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نها}} \left[\dfrac{(1 - \text{جتا}3س)}{س} + \dfrac{(1 - \text{جتا}4س)}{س} \right]$

$= \underset{3س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{3(1 - \text{جتا}3س)}{3س} + \underset{4س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{4(1 - \text{جتا}4س)}{4س}$

$= 3 \times \text{صفر} + 4 \times \text{صفر} = \text{صفر}$

(٢) $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{جتا}س}{س^2}$ = بالضرب بسطاً ومقاماً في $(1 + \text{جتا}س)$

∴ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{جتا}س}{س^2} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{(1 - \text{جتا}س)(1 + \text{جتا}س)}{س^2\ (1 + \text{جتا}س)}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{جتا}^2س}{س^2 (1 + \text{جتا}س)} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^2س}{س^2 (1 + \text{جتا}س)}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{جا}^2س}{س^2} \times \dfrac{1}{(1 + \text{جتا}س)} \right) = 1 \times \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

(٣) $\underset{س \to \frac{\pi}{2}}{\text{نها}}\ د(س) = \underset{س \to \frac{\pi}{2}}{\text{نها}} \dfrac{2(س - \frac{\pi}{2})}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}$

$= \underset{\frac{\pi}{2} - س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{-2(\frac{\pi}{2} - س)}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)} = -2 \times 1 = -2$

(٤) ∵ $\text{جا}(\pi س)$ من حساب المثلثات $= \text{جا}(\pi - \pi س)$

∴ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\pi س}{1 - س} = \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(\pi - \pi س)}{1 - س}$

$= \underset{1 - س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\pi(1 - س)}{(1 - س)} = \pi$

نهاية دالة معرفة بأكثر من قاعدة

* نظرية :-

اذا كانت الدالة د(س) معرفة بقاعدتين مختلفتين على يمين وعلى يسار نقطة أ فإن :-

$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \text{ل}$ إذا وفقط اذا كان $\text{د}(\text{أ}^{+}) = \text{د}(\text{أ}^{-}) = \text{ل}$

$$\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \text{ل}$$

* أما اذا كانت الدالة معرفة بقاعدة واحدة على يمين وعلى يسار نقطة أ فيمكن بحث النهاية مباشرة دون بحث النهاية اليمنى والنهاية اليسرى وبشرط أن تكون أ ليست نقطة حدية في مجال الدالة

مثال اذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} ٣\text{س} + ١ & ، \text{س} < ١ \\ ٥ - \text{س} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$

أوجد (١) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$ (٢) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$ (٣) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$

الحل

(١) الدالة معرفة على يمين ويسار س = -٢ بنفس القاعدة

د(س): ٣س + ١ | ٥ - س

س: -٢ ، ١ ، ٢

$\therefore \underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}}\ (٣\text{س} + ١) = -٥$

(٢) الدالة معرفة على يمين ويسار س = ٢ بنفس القاعدة

$\therefore \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ (٥ - \text{س}) = ٣$

(٣) الدالة معرفة بقاعدتين مختلفتين على يمين ويسار س = ١

∵ د(١⁺) = ٥ − ١ = ٤

∵ د(١⁻) = ٣ × ١ + ١ = ٤

∴ د(١⁺) = د(١⁻) = ٤ ⟸ نها د(س) (س ← ١) = ٤

مثال

إذا كانت د(س) = { |س − ٣| + ١ حيث س ≠ ٣ ، ٢ حيث س = ٣ }

أوجد ① نها د(س) (س ← ٣) ② نها د(س) (س ← ٥) ③ نها د(س) (س ← ١)



(٣) نها د(س) (س ← ١)

∵ د(س) = { س − ٣ ، س > ٣ ؛ ٢ ، س = ٣ ؛ −س + ٣ ، س < ٣ }

(١) ∵ د(٣⁺) = ٣ − ٣ = صفر

∵ د(٣⁻) = −٣ + ٣ = صفر ⟸ د(٣⁺) = د(٣⁻) = صفر

∴ نها د(س) (س ← ٣) = صفر

(٢) نها د(س) (س ← ٥) = ٥ − ٣ = ٢

(٣) نها د(س) (س ← ١) = −١ + ٣ = ٢

مثال

(١) ابحث وجود نها √(س − ٢) (س ← ٢)

(٢) إذا كانت د(س) = { ٣س / جا س ، س < ٠ ؛ جتا ٣س ، س > ٠ } ابحث وجود نها د(س) (س ← ٠)

الحل

(١) ∵ $د(س) = \sqrt{س - ٢}$ ∴ مجال الدالة $= [٢ ، \infty[$

∴ $د(\overset{+}{٢}) = \sqrt{٢ - ٢} = $ صفر

$د(\overset{-}{٢})$ غير موجودة

(على خط الأعداد: $د(س) = \sqrt{س-٢}$ عند ٢ ، غير معرفة)

∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}\ د(س)$ غير موجودة

(٢) ∵ $د(س) = \begin{cases} \frac{٣س}{جاس} & ، س < ٠ \\ جتا٣س & ، س > ٠ \end{cases}$

∴ $د(\overset{+}{٠}) = جتا(٣ \times ٠) = جتا٠ = ١$

$د(\overset{-}{٠}) = \frac{٣}{١} = ٣$

∴ $د(\overset{+}{٠}) \neq د(\overset{-}{٠}) \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٠}{نها}\ د(س)$ غير موجودة

مثال

إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{س + \sqrt{س} - ٦}{س - ٤} & ، س < ٤ \\ \frac{٥}{س} & ، س > ٤ \end{cases}$

أوجد $\underset{س \leftarrow ٤}{نها}\ د(س)$

الحل

∵ $د(\overset{+}{٤}) = \frac{٥}{٤} \leftarrow ①$

∵ $د(\overset{-}{٤}) = \underset{س \leftarrow ٤}{نها} \frac{س - ٤ + \sqrt{س} - ٢}{س - ٤} = \underset{س \leftarrow ٤}{نها} \left(١ + \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}\right)$

$= \underset{س \leftarrow ٤}{نها} \left(١ + \frac{\sqrt{س} - ٢}{(\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ٢)}\right) = \left(١ + \frac{١}{٤}\right) = \frac{٥}{٤}$

$\therefore$ د $(\overset{+}{٤})$ = د $(\overset{-}{٤})$ = $\frac{٥}{٤}$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٤}$ د(س) = $\frac{٥}{٤}$

مثال

اذا كانت د(س) = $\frac{\sqrt{س^٤ + ٢س^٢}}{س}$ أوجد $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

الحل

* تذكر أن $\sqrt{س^٢}$ = |س|

$\therefore$ د(س) = $\frac{س^٢ + ٢|س|}{س}$ = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س}{س} & س > ٠ \\ \frac{س^٢ - ٢س}{س} & س < ٠ \end{cases}$

$\therefore$ د(س) = $\begin{cases} س + ٢ & س > ٠ \\ س - ٢ & س < ٠ \end{cases}$

$\therefore$ د $(\overset{+}{٠})$ = ٠ + ٢ = ٢   د $(\overset{-}{٠})$ = ٠ − ٢ = −٢

$\therefore$ د $(\overset{+}{٠})$ ≠ د $(\overset{-}{٠})$ $\therefore$ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) غير موجودة

مثال

اذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + أس - ٢ & س > ٣ \\ ٢س + ب & س < ٣ \end{cases}$

لها نهاية عند س = ٣ وتساوي ١٦ أوجد أ + ب

الحل

$\therefore$ الدالة لها نهاية عند س = ٣ حيث $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ١٦

$\therefore$ د$(\overset{+}{٣})$ = د $(\overset{-}{٣})$ = ١٦

$\because 3(3)^2 + 3\text{أ} - 2 = 16 \quad \therefore 27 + 3\text{أ} - 2 = 16$

$\therefore 3\text{أ} = 18 - 27 \Leftarrow 3\text{أ} = -9$ ومنها $\text{أ} = -3 \rightarrow (1)$

$\because \text{د}(3^-) = 16 \quad \therefore 2 \times 3 + \text{ب} = 16 \Leftarrow \text{ب} = 10 \rightarrow (2)$

من (١) ، (٢) ينتج أن $\text{أ} + \text{ب} = 7$

مثال

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 + \text{أس} + \text{ب}}{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3} & ، \text{س} < 3 \\ 4\text{س} & ، \text{س} > 3 \end{cases}$

لها نهاية عند $\text{س} = 3$ أوجد قيم أ ، ب

الحل

$\because \lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{د}(\text{س})$ موجودة $\therefore \text{د}(3^+) = \text{د}(3^-) = \lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{د}(\text{س})$

$\because \lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\text{س}^2 + \text{أس} + \text{ب}}{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3} = \lim\limits_{\text{س} \to 3} 4\text{س}$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\text{س}^2 + \text{أس} + \text{ب}}{(\text{س} - 3)(\text{س} - 1)} = 12$ لها وجود

$\therefore \text{د}(3) = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \quad \therefore 9 + 3\text{أ} + \text{ب} = 0$ ، منها $\text{ب} = -3\text{أ} - 9$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\text{س}^2 + \text{أس} - 3\text{أ} - 9}{(\text{س} - 3)(\text{س} - 1)} = 12$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\text{س}^2 - 9 + \text{أ}(\text{س} - 3)}{(\text{س} - 3)(\text{س} - 1)} = 12$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3) + \text{أ}(\text{س} - 3)}{(\text{س} - 3)(\text{س} - 1)} = 12 \quad \therefore (3 + 3) + \text{أ} = 24$

منها $\text{أ} = 18 \Leftarrow \therefore \text{ب} = -63$

اتصال دالة عند نقطة

* تعريف

تكون الدالة د متصلة عند س = م اذا تحققت الشروط الثلاثة الاتية مجتمعة :-

(١) ان تكون الدالة معرفة عند س = م أى أن د(م) موجودة

(٢) ان تكون نهاية الدالة عند س = م موجودة
أى أن نها د(س) لها وجود
س ← م

(٣) أن تكون نها د(س) = د(م)
س ← م

ملاحظة

* اذا كانت الدالة د معرفة على يمين وعلى يسار نقطة(م) بقاعدتين مختلفتين وكانت الدالة متصلة عند س = م فان د($م^+$) = د($م^-$) = د(م)

* اذا كانت الدالة غير متصلة عند س = م فان منحنى الدالة اما أن يكون به ثغرة وذلك عندما تكون الدالة غير معرفة عند س = م أو يكون المنحنى به قفزة وذلك عندما تكون نهاية الدالة غير موجودة عند س = م أو يكون به ثغرة وقفزة وذلك عندما تكون الدالة غير معرفة عند س = م والنهاية غير موجودة عند س = م

مثال

ابحث اتصال الدوال الاتية

(١) د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ عند س = ١ ، س = ٢

الحل

(١) ∵ د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ ∴ مجال الدالة = ح - {٢}

∴ د(٢) غير موجودة ← الدالة ليست متصلة عند س = ٢

(٢) ∵ د(س) = $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢}$

∵ $د(س) = س + ٢$ حيث $س \in ح - \{٣، ٤\}$

بحث اتصال الدالة عند $س = ١$:

∵ $د(١) = ١ + ٢ = ٣$ موجودة

∵ $\lim_{س \leftarrow ١} د(س) = ١ + ٢ = ٣$ ∴ $\lim_{س \leftarrow ١} د(س) = د(١) = ٣$

∴ الدالة متصلة عند $س = ١$

مثال

ابحث اتصال الدالة $د(س) = ٥ - |س - ٣|$ عند $س = ٣$

الحل

∵ $د(س) = ٥ - |س - ٣|$ ⟸ مجال الدالة = ح

∴ $د(س) = \begin{cases} ٥ - (س - ٣) & \text{عندما } س \geq ٣ \\ ٥ + (س - ٣) & \text{عندما } س < ٣ \end{cases}$

∴ $د(س) = \begin{cases} ٨ - س & \text{عندما } س \geq ٣ \\ س + ٢ & \text{عندما } س < ٣ \end{cases}$

(١) ∵ $د(٣) = ٨ - ٣ = ٥$ موجودة

(٢) ∵ $د(\overset{+}{٣}) = ٨ - ٣ = ٥$ ، ∵ $د(\overset{-}{٣}) = ٣ + ٢ = ٥$

∴ $د(\overset{+}{٣}) = د(\overset{-}{٣}) = د(٣)$

∴ $\lim_{س \leftarrow ٣} د(س) = د(٣)$ ⟸ ∴ الدالة متصلة عند $س = ٣$

مثال

ابحث اتصال الدالة

$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٣ & ، س \geq ١ \\ \dfrac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١} & ، س < ١ \end{cases}$ عند $س = ١$

Scanned by CamScanner

الحل

∵ مجال الدالة = ح

(1) ∵ د(1) = $(1)^2 + 3 = 4$ موجودة

(2) ∵ د(1^+) = $(1)^2 + 3 = 4$

(3) د(1^-) = $\lim_{س \to 1} \frac{س^2 + 2س - 3}{س - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{(س - 1)(س + 3)}{س - 1}$

∴ د(1^-) = $\lim_{س \to 1}$ (س + 3) = 4

من (1)، (2)، (3) ينتج أن د(1^+) = د(1^-) = د(1)

∴ $\lim_{س \to 1}$ د(س) = د(1) ∴ الدالة متصلة عند س = 1

مثال

ابحث اتصال الدالة

د(س) = $\begin{cases} \frac{5س^2 + جا^2 س}{س \text{ طا } 3س} & س < 0 \\ 3 & س \geq 0 \end{cases}$ عند س = 0

الحل

∵ المجال = ح

(1) ∵ د(0) = 3 موجودة

(2) ∵ د(0^+) = 3

(3) ∵ د(0^-) = $\lim_{س \to 0} \frac{5س^2 + جا^2 س}{س \text{ طا } 3س}$ بالقسمة على $س^2$

∴ د(0^-) = $\lim_{س \to 0} \frac{5 + \left(\frac{جا س}{س}\right)^2}{\frac{\text{طا } 3س}{س}} = \frac{5 + 4}{3} = 3$

∴ من (1)، (2)، (3) ينتج أن د(0^+) = د(0^-) = د(0)

∴ $\lim_{س \to 0}$ د(س) = د(0) ∴ الدالة متصلة عند س = 0

مثال ابحث اتصال الدالة

$$د(س) = \begin{cases} \frac{جا ٢س}{س} - جتا س & س \neq ٠ \\ \frac{١}{٢} & س = ٠ \end{cases}$$

عند س = ٠

الحل

(١) ∵ $د(٠) = \frac{١}{٢}$ موجودة

(٢) $\lim_{س \to ٠} د(س) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٢س}{س} - جتا س\right) = ٢ - ١ = ١$

∴ $\lim_{س \to ٠} د(س) \neq د(٠)$ ∴ الدالة ليست متصلة عند س = ٠

مثال ابحث اتصال الدالة

$$د(س) = \begin{cases} ١ + جا س & س < \frac{\pi}{٢} \\ ٢ + (س - \frac{\pi}{٢})^٢ & س \geq \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

عند س = $\frac{\pi}{٢}$

الحل

(١) ∵ $د(\frac{\pi}{٢}) = ٢$ موجودة

(٢) ∵ $د(\frac{\pi}{٢}^+) = ٢$ ، ∵ $د(\frac{\pi}{٢}^-) = ١ + ١ = ٢$

∴ $د(\frac{\pi}{٢}^+) = د(\frac{\pi}{٢}^-) = د(\frac{\pi}{٢})$ ⟸ ∴ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} د(س) = د(\frac{\pi}{٢})$

∴ الدالة متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

*** تدريب :**

ابحث اتصال الدوال الآتية

(١) $د(س) = \frac{|س + ١|}{س + ١}$ عند س = −١

(٢) $د(س) = \frac{جا^٢ ٣س}{س ظا س}$ عند س = صفر

مثال

أوجد قيمة $أ$ التي تجعل الدالة

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 - 5س + 6}{س^3 - 8} & ، س \neq 2 \\ \dfrac{-2}{|أ|} & ، س = 2 \end{cases}$$

متصلة عند $س = 2$

الحل

∵ الدالة متصلة عند $س = 2$ ∴ $\lim_{س \to 2} د(س) = 2$

∴ $\lim_{س \to 2} \dfrac{(س-3)(س-2)}{(س-2)(س^2+2س+4)} = \dfrac{-2}{|أ|}$

∴ $\dfrac{-1}{12} = \dfrac{-2}{|أ|} \Leftarrow$ ∴ $|أ| = 24$ ومنها $أ = \pm 24$

مثال

أوجد قيمة كلاً من $أ$ ، $ب$ إذا كانت الدالة

$$د(س) = \begin{cases} س^2 + أس - 2 & ، س > 2 \\ 4 & ، س = 2 \\ أ5 + بس & ، س < 2 \end{cases}$$

متصلة عند $س = 2$

الحل

∵ الدالة متصلة عند $س = 2$

∴ (1) $د(2^+) = د(2)$ ∴ $4 + 2أ - 2 = 4 \Leftarrow أ = 1$

(2) $د(2^-) = د(2)$ ∴ $أ5 + ب = 4$ ومنها $ب = -\frac{1}{2}$

مثال

1 إذا كانت $د(س) = \begin{cases} 3س^2 - 1 & س \leq 0 \\ \dfrac{أس^2 + ب}{\sqrt{4س + 5}} & 0 < س < 1 \\ & س \geq 1 \end{cases}$

متصلة عند $س = 0$ ومتصلة عند $س = 1$ أوجد $أ$ ، $ب$

الحل

(١) ∵ الدالة متصلة عند س = ٠ ⟸ ∴ $د(٠^+) = د(٠^-) = د(٠)$

∴ $د(٠^+) = د(٠)$ ∴ $ا × (٠)^٢ + ب = ٣ × (٠)^٢ - ١$

∴ منها ب = -١ ⟵ ①

(٢) ∵ الدالة متصلة عند س = ١ ⟸ ∴ $د(١^+) = د(١^-) = د(١)$

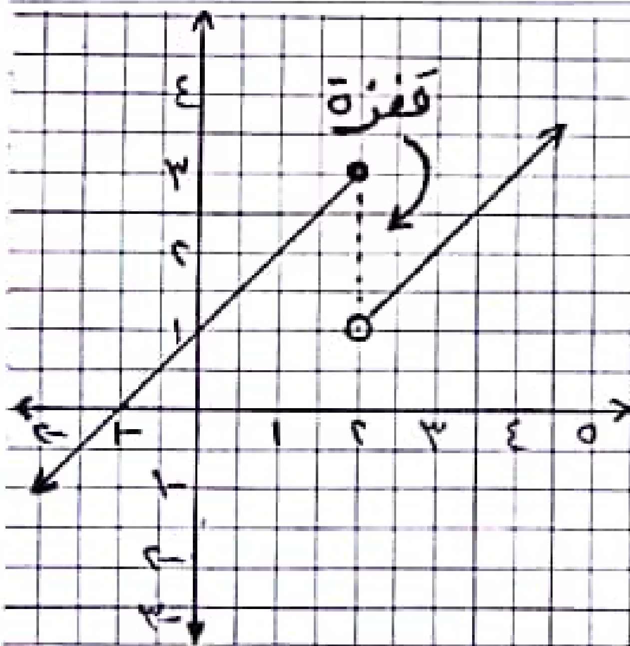
∴ $د(١^-) = د(١)$ ∴ $ا × (١)^٢ + ب = \sqrt{٤ × ١ + ٥}$

∴ ا - ١ = ٣ منها ا = ٤ ⟵ ②

ملاحظات

(١) اذا كانت د دالة في (س) وكانت الدالة ليس لها نهاية عند س = ا أي أن $\lim_{س \to ا}$ د(س) غير موجودة فان منحنى الدالة عند س = ا يكون به قفزة وعلى ذلك فان الدالة د(س) تكون غير متصلة عند س = ا ولا يمكن اعادة تعريف هذه الدالة بحيث تصبح متصلة عند س = ا

* مثالاً لذلك



د(س) = { س + ١ ، س ≤ ٢ ؛ س - ١ ، س > ٢ }

∵ د(٢) = ٣ موجودة

∵ $د(٢^+) = ١$

$د(٢^-) = ٣$

∴ $د(٢^+) \neq د(٢^-)$

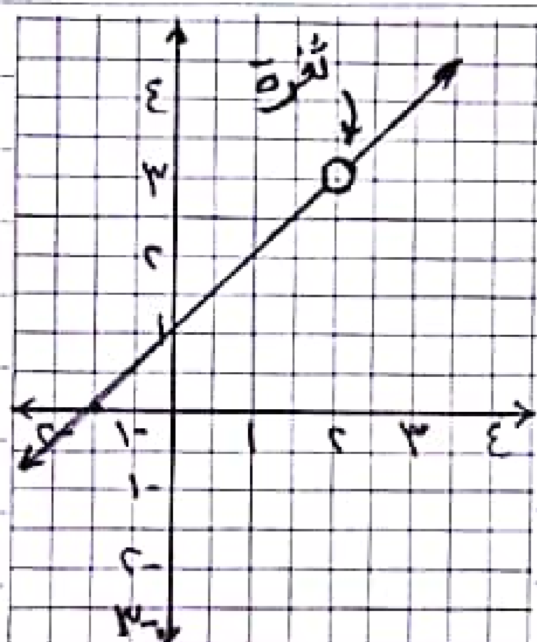
∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) غير موجودة

وعلى ذلك تكون الدالة د غير متصلة عند س = ٢

ولا يمكن اعادة تعريفها بحيث تصبح متصلة عند س = ٢

(٢) إذا كانت الدالة د غير معرفة عند س = أ ولكن نهاية الدالة عند س = أ موجودة فإن منحنى الدالة يكون به ثغرة (ثقب) عند س = أ وتكون الدالة غير متصلة عند س = أ ولكن يمكن إعادة تعريفها لتصبح متصلة عند هذه النقطة وذلك بجعل د(أ) = نها د(س) حيث س ← أ

✱ مثالاً لذلك



$$د(س) = \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢}$$

∴ د(٢) غير موجودة

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٢

∵ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} د(س) = \lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢}$

∴ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} د(س) = \lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{س - ٢}$

∴ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} د(س) = ٣$ موجودة

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند س = ٢ وذلك بجعل د(٢) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} د(س) = ٣$

$$∴ د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢} & \text{حيث } س \neq ٢ \\ ٣ & \text{عند } س = ٢ \end{cases}$$

دالة متصلة عند س = ٢

مثال أعد تعريف الدالة $د(س) = \frac{س^٢ - س - ٦}{س - ٣}$ بحيث تكون متصلة عند س = ٣ إن أمكن

الحل

(١) ∵ د(٣) غير موجودة

(٢) ∵ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{(س-٣)(س+٢)}{س-٣}$ = ٥

∵ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ٥ موجودة ∴ يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تصبح متصلة عند س = ٣ وذلك بوضع

د(٣) = $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ٥

∴ الدالة د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢-س-٦}{س-٣} & ، س \ne ٣ \\ ٥ & ، س = ٣ \end{cases}$

تصبح متصلة عند س = ٣

مثال

اعد تعريف الدالة د(س) = $\begin{cases} س^٣+٢س & ، س > ١ \\ ٥س-١ & ، س < ١ \end{cases}$

لتصبح متصلة عند س = ١ إن أمكن

الحل

(١) ∵ د(١⁺) = ١ + ٢ = ٣ د(١⁻) = ٥ - ١ = ٤

∴ د(١⁺) ≠ د(١⁻) ⇐ ∴ $\lim_{س \to ١}$ د(س) غير موجودة

∴ لا يمكن اعادة تعريف الدالة لتكون متصلة عند س = ١

مثال

اعد تعريف الدالة د(س) = $\frac{طا ٥س}{جا ٨س}$ لتصبح متصلة عند س = ٠

الحل

∵ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠}$ $\left[\frac{طا ٥س}{س} \times \frac{س}{جا ٨س}\right]$ = $\frac{٥}{٨}$

∴ د(س) = $\begin{cases} \frac{طا ٥س}{جا ٨س} & ، س \ne ٠ \\ \frac{٥}{٨} & ، س = ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = صفر

مثال ابحث اتصال الدالة د عند س = ٠ وإن كانت غير متصلة عند س = ٠ فأعد تعريفها بحيث تكون متصلة عند س = ٠ إن أمكن حيث

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{3\text{س} + 1 - \text{جتا س}}{5\text{س}} & \text{س} > 0 \\ \dfrac{3}{5}\ \text{جتا س} & \text{س} < 0 \end{cases}$$ عند س = ٠



الحل

مجال الدالة = ح - {٠}

∵ د(٠) غير موجودة .

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٠ ← أولاً

∵ $\text{د}(0^+) = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{3\text{س} + 1 - \text{جتا س}}{5\text{س}}$

∴ $\text{د}(0^+) = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \left[\dfrac{3}{5} + \dfrac{1 - \text{جتا س}}{5\text{س}} \right] = \dfrac{3}{5}$

∵ $\text{د}(0^-) = \dfrac{3}{5}$

∴ $\text{د}(0^+) = \text{د}(0^-) = \dfrac{3}{5}$ ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{د}(\text{س}) = \dfrac{3}{5}$

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة د بحيث تكون متصلة عند س = ٠ كما يلي

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{3\text{س} + 1 - \text{جتا س}}{5\text{س}} & \text{س} > 0 \\ \dfrac{3}{5} & \text{س} = 0 \\ \dfrac{3}{5}\ \text{جتا س} & \text{س} < 0 \end{cases}$$

* **تدريب :-**

أعد تعريف الدوال الآتية عند النقط المبينة بحيث تصبح متصلة إن أمكن

(١) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{|\text{س}| + \text{س}}{\text{س}}$ عند س = ٠

(٢) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{جاس}}{|\text{س}|}$ عند س = ٠

اتصال دالة على فترة

* اتصال دالة على الفترة المفتوحة]أ، ب[:-
إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة]أ، ب[فإن د تكون متصلة على هذه الفترة إذا كانت متصلة عند كل نقطة ∈]أ، ب[

* اتصال دالة على الفترة المغلقة [أ، ب] :-
إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة [أ، ب] فإن الدالة د تكون متصلة على هذه الفترة إذا كان
(١) الدالة د متصلة على الفترة المفتوحة]أ، ب[
(٢) إذا كانت الدالة د متصلة من اليمين عند (أ)
أى أن $\lim_{س \to أ^+}$ د(س) = د(أ)

(٣) إذا كانت الدالة د متصلة من اليسار عند (ب)
أى أن $\lim_{س \to ب^-}$ د(س) = د(ب)

ملاحظات

(١) الدالة كثيرة الحدود متصلة على ح أو أى فترة جزئية منها
(٢) الدالة الكسرية متصلة على ح - {أصفار المقام} أو أى فترة جزئية منها
(٣) دالة الجيب ودالة جيب التمام دوال متصلة على ح أو أى فترة جزئية منها
(٤) دالة الظل د(س) = طاس متصلة على الفترات ح - {س : س = $\frac{\pi}{2}$ + ن π حيث ن ∈ ص}
(٥) إذا كانت الدالتين د، ر معرفتين على الفترة]أ، ب[وكانتا متصلتين على هذه الفترة فإن الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة]أ، ب[أيضاً وهى (١) د ± ر (٢) د × ر
(٣) $\frac{د}{ر}$ بشرط ر(س) ≠ صفر

مثال ابحث اتصال الدوال الآتية

(1) $د(س) = 2س^3 - 3س^2 - 5$ (2) $د(س) = \frac{س^3 - 8}{س - 2}$

(3) $د(س) = \frac{2}{س^2 + 1}$ (4) $د(س) = جاس + جتاس$

الحل

(1) ∵ $د(س) = 2س^3 - 3س^2 - 5$ كثيرة حدود فهي متصلة على ح

(2) ∵ $د(س) = \frac{س^3 - 8}{س - 2}$ دالة كسرية فهي متصلة على ح − {2}

(3) ∵ $د(س) = \frac{2}{س^2 + 1}$ دالة كسرية لاكنها متصلة على ح. لماذا؟

(4) $د(س) = جاس + جتاس$ ∵ جاس دالة متصلة على ح

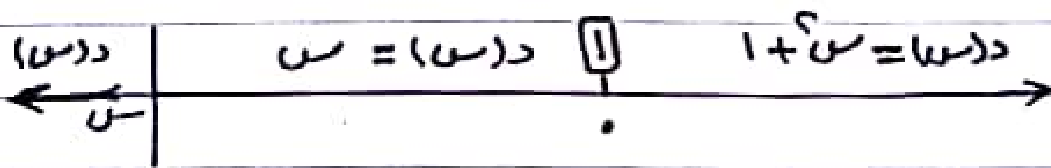
∵ جتاس دالة متصلة على ح ⟸ ∴ د(س) متصلة على ح

مثال ابحث اتصال الدالة

$$د(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س \geq 0 \\ س & ، س < 0 \end{cases}$$

الحل

∵ مجال الدالة = ح فترة مفتوحة



(1)

لابد من بحث الاتصال في الفترات]−∞، 0[،]0، ∞[وعند س = 0

(١) في الفترة]-∞، ٠[← د(س) = س كثيرة حدود فهي متصلة على هذه الفترة

(٢) في الفترة]٠، ∞[← د(س) = $س^٢$ + ١ كثيرة حدود فهي متصلة على هذه الفترة

(٣) بحث الاتصال عند س = ٠

∵ د(٠) = ١ موجودة

∵ د(٠^+) = ٠ + ١ = ١ د(٠^-) = صفر

∴ د(٠^+) ≠ د(٠^-) ← نهـا د(س) عند س ← ٠ غير موجودة

الدالة ليست متصلة عند س = ٠

من ① و ② و ③ ينتج أن الدالة متصلة على ح - {٠}

مثال ابحث اتصال الدالة د(س) =
- $\frac{س^٥ - ١}{س - ١}$ ، س > ١
- ٣س + ٢ ، س ≤ ١

الحل

∵ مجال الدالة = ح

د(س) = ٣س + ٢ | ١ | د(س) = $\frac{س^٥ - ١}{س - ١}$

(١) في]-∞، ١[← د(س) = ٣س + ٢ كثيرة حدود متصلة

(٢) في]١، ∞[← د(س) = $\frac{س^٥ - ١}{س - ١}$ متصلة على هذه الفترة

(٣) بحث الاتصال عند س = ١

∵ د(١) = ٥ موجودة

د(١^+) = نهـا (س ← ١) $\frac{س^٥ - (١)^٥}{س - ١}$ = ٥ × $(١)^٤$ = ٥

د(١^-) = ٣ + ٢ = ٥ ← ∴ نهـا (س ← ١) د(س) = د(١)

∴ الدالة متصلة عند س = ١

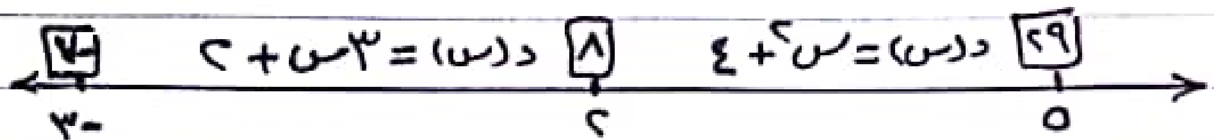
من ١، ٢، ٣ ينتج أن الدالة متصلة على ح

مثال

ابحث اتصال الدالة د(س) =
- ٣س + ٢ ، -٣ ≤ س < ٢
- $س^{2}$ + ٤ ، ٢ ≤ س ≤ ٥

الحل

مجال الدالة = [-٣ ، ٥] فترة مغلقة



(١) في الفترة]-٣ ، ٢[← د(س) = ٣س + ٢ كثيرة حدود متصلة

(٢) في الفترة]٢ ، ٥[← د(س) = $س^{2}$ + ٤ كثيرة حدود متصلة

(٣) بحث الاتصال عند س = ٢

∵ د(٢) = ٨ موجودة

د(٢^{+}) = $(٢)^{2}$ + ٤ = ٨   د(٢^{-}) = ٣×٢ + ٢ = ٨

∴ د(٢^{+}) = د(٢^{-}) = د(٢)

∴ نها (س ← ٢) د(س) = د(٢) ∴ الدالة متصلة عند س = ٢

(٤) بحث اتصال الدالة من اليمين عند النقطة س = -٣ :-

∵ د(-٣) = -٧ موجودة

∵ د(-٣^{+}) = ٣×-٣ + ٢ = -٧

∴ نها (س ← -٣^{+}) د(س) = د(-٣) ∴ الدالة متصلة من اليمين عند س = -٣

(٥) بحث اتصال الدالة من اليسار عند س = ٥ :-

∵ د(٥) = ٢٩ موجودة

∵ د(٥^{-}) = ٢٥ + ٤ = ٢٩

∴ نها (س ← ٥^{-}) د(س) = د(٥) ∴ الدالة متصلة من اليسار عند س = ٥

من ①، ②، ③، ④، ⑤ يتبع أن

الدالة د(س) متصلة على الفترة [-٣ ، ٥]

مثال ابحث اتصال الدالة $د(س) = \sqrt{س - ٢}$

(١) على مجالها (٢) على ح

الحل

أولاً: بحث اتصال الدالة $د(س) = \sqrt{س - ٢}$ على مجالها $[٢، \infty[$

(١) بحث الاتصال على الفترة $]٢، \infty[$:-

بفرض أن $أ \in]٢، \infty[\Leftarrow \therefore د(أ) = \sqrt{أ - ٢}$

$\because \lim_{س \to أ} د(س) = \sqrt{أ - ٢}$

$\therefore \lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$ $\therefore$ الدالة متصلة عند أي نقطة (أ) $\in]٢، \infty[$ فهي متصلة على $]٢، \infty[$

(٢) بحث الاتصال عند س = ٢

$\because د(٢) = \sqrt{٢ - ٢} = $ صفر موجودة

$د(٢^+) = \sqrt{٢ - ٢} = $ صفر

$\therefore \lim_{س \to ٢^+} د(س) = د(٢)$ $\therefore$ الدالة متصلة عند س = ٢ من اليمين

من (١)، (٢) يتبع أن الدالة متصلة على مجالها $[٢، \infty[$

* ثانياً بحث اتصال الدالة على ح :-

د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ ⊙ غير معرفة

(١) الدالة غير معرفة على الفترة $]-\infty، ٢[$

$\therefore$ الدالة غير متصلة في الفترة $]-\infty، ٢[$

(٢) عند س = ٢ $\because د(٢^-)$ غير موجودة

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند س = ٢

(٣) في الفترة $]٢، \infty[$ الدالة متصلة كما أثبتنا سابقاً

$\therefore$ من ①، ②، ③ الدالة متصلة على ح $-]-\infty، ٢]$

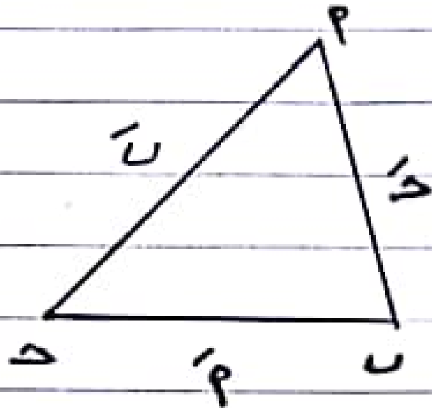
حساب المثلثات

١- قانون الجيب
٢- قانون جيب التمام
٣- حل المثلث

قانون الجيب

* قاعدة الجيب :-

في أي مثلث تتناسب أطوال الأضلاع مع جيوب الزوايا المقابلة لها .



أي انه في Δ أ ب جـ يكون

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$$

مثال

في Δ أ ب جـ اذا كان أَ = ١٠ سم ، ق($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠° ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ٤٥° أوجد كلاً من بَ ، جـَ وكذلك مساحة Δ أ ب جـ

الحل

∵ أَ = ١٠ سم ، ق($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠° ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ٤٥° ∴ ق($\hat{\text{جـ}}$) = ١٠٥°

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{\text{١٠}}{\text{جا ٣٠°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٤٥°}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا ١٠٥°}}$

منها بَ = $\frac{\text{١٠ جا ٤٥°}}{\text{جا ٣٠°}}$ منها بَ = ١٤,١ سم

∴ جـَ = $\frac{\text{١٠ جا ١٠٥°}}{\text{جا ٣٠°}}$ منها جـَ ≃ ١٩,٣ سم

∵ مساحة Δ أ ب جـ = نصف حاصل ضرب أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ بَ جـَ جا أ

= $\frac{1}{2}$ × ١٤,١ × ١٩,٣ × جا ٣٠°

∴ مساحة Δ أ ب جـ = ٦٨ سم² تقريباً

مثال إذا كان Δ س ص ع محيطه ١٨ سم وكان $\frac{1}{2}$ جا س = $\frac{1}{3}$ جا ص = $\frac{1}{4}$ جا ع أوجد أطوال أضلاع المثلث

الحل

$\because$ $\frac{\text{جا س}}{2} = \frac{\text{جا ص}}{3} = \frac{\text{جا ع}}{4}$ منها $\frac{2}{\text{جا س}} = \frac{3}{\text{جا ص}} = \frac{4}{\text{جا ع}}$

$\therefore$ سَ : صَ : عَ = ٢ : ٣ : ٤

$\therefore$ سَ = ٢ م ، صَ = ٣ م ، عَ = ٤ م ← ①

$\because$ محيط Δ س ص ع = ١٨ سم $\therefore$ ٩ م = ١٨ ← $\therefore$ م = ٢

$\therefore$ سَ = ٤ سم ، صَ = ٦ سم ، عَ = ٨ سم

مثال أكمل ما يأتي :-

(١) في أي مثلث أ ب جـ يكون $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\dots\dots}$

(٢) في أي مثلث أ ب جـ يكون $\frac{\text{جا (أ + ب)}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}} = \dots\dots\dots$

الحل

(١) $\because$ في Δ أ ب جـ يكون $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$

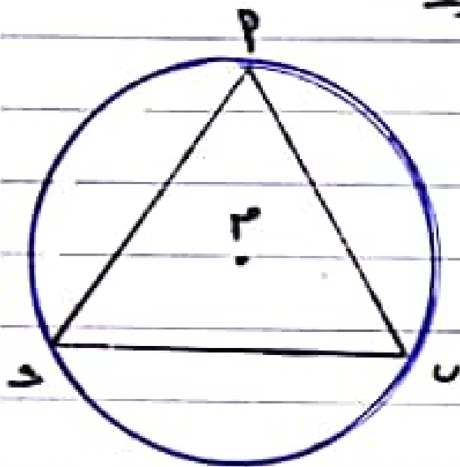
منها $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جا ب}}$ باستخدام خواص النسبة ينتج $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}}$

(٢) $\because$ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$ $\because$ ق($\hat{\text{جـ}}$) = ١٨٠° − (أ + ب)

$\therefore$ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا (أ + ب)}}$ منها $\frac{\text{أَ} + \text{بَ}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا (أ + ب)}}$

$\therefore$ $\frac{\text{جا (أ + ب)}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}}$

تمرين مشهور



في أي مثلث أ ب جـ يكون

$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢نق$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ (المارة برؤوس △ أ ب جـ)

مثال

أكمل ما يأتي :

(١) اذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ فإن $\frac{أ}{٢جا أ}$ = ...

(٢) اذا كان طول ضلع في مثلث ما = ١٢سم وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع = ٥٥° فإن محيط الدائرة المارة برؤوسه يساوي.......

الحل

(١) ∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢نق$ منها $\frac{أ}{جا أ} = ٢نق$

∴ $\frac{أ}{٢جا أ} = نق$

(٢) بفرض أن أ = ١٢سم ، ق(∠أ) = ٥٥°

∵ $\frac{أ}{جا أ} = ٢نق$ ∴ نق = $\frac{٦}{جا ٥٥°}$ ≃ ٧٫٣سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق

≃ ٤٦ سم

مثال أ ب ﺣ مثلث مساحة سطحه ٤٥٠ سم²
ﻕ(ب̂) = ٨٢° ، ﻕ(ﺣ̂) = ٥٦° فأوجد أ

الحل

∵ ﻕ(ب̂) = ٨٢° ، ﻕ(ﺣ̂) = ٥٦° ∴ ﻕ(أ̂) = ٤٢°

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ﺣ}{جا ﺣ}$ ∴ $\frac{أ}{جا ٤٢°} = \frac{ب}{جا ٨٢} = \frac{ﺣ}{جا ٥٦}$ ①

∵ مساحة سطح المثلث أ ب ﺣ = $\frac{1}{2}$ أ ب جا ﺣ

∴ ٤٥٠ = $\frac{1}{2}$ أ × ب جا ٥٦° ← ②

من ① ينتج أن ب = $\frac{أ جا ٨٢°}{جا ٤٢°}$ بالتعويض في ②

∴ ٤٥٠ = $\frac{1}{2}$ أ × $\frac{أ جا ٨٢°}{جا ٤٢°}$ × جا ٥٦° منها أ = ٢٧,١ سم

مثال إذا كان محيط △ أ ب ﺣ = ٤٠ سم ، ﻕ(أ̂) = ٤٤°
ﻕ(ب̂) = ٦٦° أوجد أطوال أضلاع △ أ ب ﺣ

الحل

∵ ﻕ(أ̂) = ٤٤° ، ﻕ(ب̂) = ٦٦° ∴ ﻕ(ﺣ̂) = ٧٠°

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ﺣ}{جا ﺣ}$ منها $\frac{أ + ب + ﺣ}{جا ٤٤° + جا ٦٦° + جا ٧٠°}$ = كل نسبة

$\frac{٤٠}{٢,٥٥}$ ≃ ١٥,٧ ≃ كل نسبة ∴ منها أ = ١٥,٧ جا ٤٤° ≃ ١٠,٩ سم

∴ ب = ١٥,٧ جا ٦٦° = ١٤,٣ سم

∴ ﺣ = ١٥,٧ جا ٧٠ = ١٤,٨ سم

مثال أ ب حـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥° وكان أَ + بَ = ($\sqrt{6}$ + ٢) سم أوجد أَ ، بَ

الحل

∵ ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥° فإن ق(∠حـ) = ٧٥°

∴ $\frac{أَ}{حا أ} = \frac{بَ}{حا ب} = \frac{حـَ}{حا حـ}$ ∴ $\frac{أَ}{حا ٦٠°} = \frac{بَ}{حا ٤٥°}$ من خواص

التناسب ينتج $\frac{أَ + بَ}{حا ٦٠° + حا ٤٥°}$ = كل نسبة ⟸ ∴ كل نسبة = $٢\sqrt{2}$

∴ $\frac{أَ}{حا ٦٠°} = ٢\sqrt{2}$ منها أَ = $\sqrt{6}$ سم

$\frac{بَ}{حا ٤٥°} = ٢\sqrt{2}$ منها بَ = ٢ سم

مثال في أي مثلث أ ب حـ أثبت أن

(١) $\frac{٣أَ - ٤بَ}{٣حا أ - ٤حا ب}$ = ٢نق حيث نق نصف قطر الدائرة الخارجية للمثلث

(٢) مساحة المثلث = $\frac{أَ^2 حا ب حا حـ}{٢حا أ} = \frac{أَ بَ حـَ}{٤ نق}$

الحل

∵ $\frac{أَ}{حا أ} = \frac{بَ}{حا ب} = \frac{حـَ}{حا حـ}$ = ٢نق بضرب حدى النسبة الأولى × ٣ وحدى النسبة الثانية × -٤

∴ $\frac{٣أَ}{٣حا أ} = \frac{-٤بَ}{-٤حا ب}$ = ٢نق باستخدام خواص التناسب

∴ $\frac{٣أَ - ٤بَ}{٣حا أ - ٤حا ب}$ = ٢نق ⟵ أولاً

(٢) ∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أَ بَ حا حـ ⟵ ①

∵ $\frac{أَ}{حاأ} = \frac{بَ}{حاب}$ منها $بَ = \frac{أَ\ حاب}{حاأ}$ بالتعويض في (1)

∴ مساحة Δ أ ب ح $= \frac{1}{2}$ أَ × $\frac{أَ\ حاب}{حاأ}$ × حاح $= \frac{أَ^2\ حاب\ حاح}{2\ حاأ}$ = الأيسر

(٣) ∵ مساحة Δ أ ب ح $= \frac{1}{2}$ أَ بَ حاح ⟵ (1)

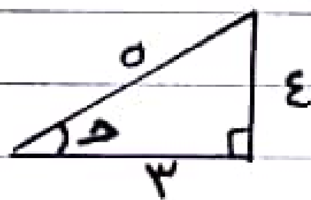
∵ $\frac{أَ}{حاأ} = \frac{بَ}{حاب} = \frac{حَ}{حاح} = ٢$ نق منها حاح $= \frac{حَ}{٢\ نق}$

بالتعويض في (1) ينتج مساحة Δ أ ب ح $= \frac{أَ\ بَ\ حَ}{٤\ نق}$

مثال

أ ب ح مثلث منفرج الزاوية في أ فيه بَ = ٥ سم ، ظاح $= \frac{٤}{٣}$ ، ق(بˆ) = ٣٠° أوجد لأقرب سم كلاً من أَ ، حَ ، مساحة Δ أ ب ح

الحل



∵ $\frac{أَ}{حاأ} = \frac{بَ}{حاب} = \frac{حَ}{حاح}$

∴ $\frac{أَ}{حاأ} = \frac{٥}{حا٣٠°} = \frac{حَ}{\frac{٤}{٥}}$ ∴ $\frac{أَ}{حاأ} = ١٠ = \frac{٥\ حَ}{٤}$

∴ حَ = ٨ سم ⟵ (1)

∵ Δ أ ب ح منفرج الزاوية في أ ⟸ ∴ ح حادة حيث ظاح $= \frac{٤}{٣}$

∴ ق(حˆ) = ٤٨ً ٧َ ٥٣° ⟸ ∴ ق(أˆ) = ١٨٠ − (ب + ح)

∴ ق(أˆ) = ١٢ً ٥٢َ ٩٦°

∴ $\frac{أَ}{حا(٩٦,٨٧)} = ١٠$ منها أَ = ١٠ سم ⟵ (2)

∴ مساحة Δ أ ب ح $= \frac{1}{2}$ أَ حَ حاب $= \frac{1}{2} × ١٠ × ٨ × \frac{1}{2}$

= ٢٠ سم²

قانون جيب التمام

* قاعدة جيب التمام :-

فى أى مثلث أ ب حـ يكون $\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب}\,\text{حـ}$ جتا أ

جتا أ = $\frac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب}\,\text{حـ}}$ ويستخدم اذا علم ضلعان

وقياس الزاوية المحصورة بينهما أو اذا علم الثلاثة أضلاع

* أى أن مربع أى ضلع من مثلث يساوى مجموع مربعى الضلعين الاخرين مطروحاً منهم ضعف حاصل ضرب الضلعين الاخرين فى جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما
* يفضل استخدام قانون جيب التمام عند ايجاد قياس احد زوايا مثلث

مثال

فى Δ أ ب حـ أوجد قيمة أ اذا كان ب = ٣٠ كم ، حـ = ١٤ كم ، ق(أ) = ٦٠°

الحل

∵ ب = ٣٠ كم ، حـ = ١٤ كم ، ق(أ) = ٦٠° الزاوية المحصورة بينهما

∴ $\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب}\,\text{حـ}$ جتا أ

= ٩٠٠ + ١٩٦ - ٤٢٠ = ٦٧٦ منها أ = ٢٦ كم

مثال

أ ب حـ مثلث فيه أ = ٤ سم ، ب = ٥ سم ، حـ = ٦ سم احسب قياس اكبر زواياه وكذلك مساحته

الحل

∵ اكبر زوايا المثلث هى المقابلة لاكبر ضلع فيه

∵ أكبر زوايا المثلث هي ($\hat{ح}$) ∴ جتا ح = $\frac{أ^2 + ب^2 - ح^2}{2 أ ب}$

∴ جتا ح = $\frac{16 + 25 - 39}{2 \times 4 \times 5}$ ∴ جتا ح = $\frac{1}{8}$ = 0,125

∴ ق (ح) = 9 49 82°

∴ مساحة Δ أ ب ح = $\frac{1}{2}$ أ ب جا ح

= $\frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times 0,993$ = 9,9 كم تقريباً

مثال

أ ب ح مثلث محيطه 50 كم ، أ = 13 كم ، ب = 17 كم

أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث ثم احسب مساحته .

الحل

∵ محيط المثلث = 50 كم ∴ أ + ب + ح = 50 ⟸ ∴ ح = 20 كم ①

∴ أكبر زاوية في المثلث هي زاوية ($\hat{ح}$)

∴ جتا ح = $\frac{أ^2 + ب^2 - ح^2}{2 أ ب}$ ∴ جتا ح = $\frac{(13)^2 + (17)^2 - (20)^2}{2 \times 13 \times 17}$

∴ جتا ح = 0,1312 منها ق ($\hat{ح}$) = 35 47 82° ⟵ أولاً

∴ مساحة سطح Δ أ ب ح = $\frac{1}{2}$ أ ب جا ح = 5,119 كم²

مثال

أ ب ح مثلث فيه $\frac{1}{3}$ جا أ = $\frac{1}{4}$ جا ب = $\frac{1}{5}$ جا ح

أوجد ق ($\hat{ح}$) وإذا كان محيط المثلث = 24 كم أوجد مساحته

الحل

∵ $\frac{جا أ}{3} = \frac{جا ب}{4} = \frac{جا ح}{5}$ ⟸ ∴ $\frac{3}{جا أ} = \frac{4}{جا ب} = \frac{5}{جا ح}$

∴ أ = 3 م ، ب = 4 م ، ح = 5 م

∴ جتا ح = $\frac{أ^2 + ب^2 - ح^2}{2 أ ب}$ ∴ جتا ح = $\frac{9 م^2 + 16 م^2 - 25 م^2}{2 \times 3 م \times 4 م}$

∴ جتا ح = صفر

∵ ق(∠ك) = ٩٠° ← أولاً

∵ محيط المثلث = ٢٤سم ∴ ٣م + ٤م + ٥م = ٢٤

∴ ١٢م = ٢٤ ومنها م = ٢ ∴ أَ = ٦سم ، بَ = ٨سم ، حَ = ١٠

∵ △ أ ب حـ قائم الزاوية في حـ ∴ مساحته = ½ أَ بَ جا حـ

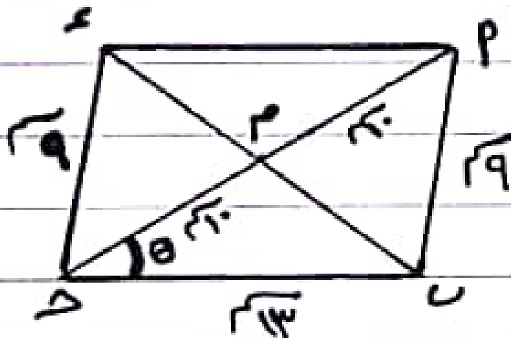
∴ مساحة △ أ ب حـ = ½ × ٦ × ٨ × ١ = ٢٤ سم²

مثال

أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ ب = ٩سم

ب حـ = ١٣سم ، أ حـ = ٢٠سم أوجد طول ب ء

الحل



✻ في △ أ ب حـ :

أ ب = ٩سم ، ب حـ = ١٣سم ، أ حـ = ٢٠سم

∴ جتا θ = $\frac{(١٣)^2 + (٢٠)^2 - (٩)^2}{٢ × ١٣ × ٢٠}$ ①

∴ جتا θ = $\frac{٦١}{٦٥}$ ①

✻ في △ م ب حـ :

جتا θ = $\frac{(١٣)^2 + (١٠)^2 - (م ب)^2}{٢ × ١٣ × ١٠}$ = $\frac{٢٦٩ - (م ب)^2}{٢٦٠}$ ← ②

∴ من ① ، ② ينتج أن $\frac{٦١}{٦٥}$ = $\frac{٢٦٩ - (م ب)^2}{٢٦٠}$ ومنها $(م ب)^2$ = ٢٥

∴ طول م ب = ٥سم ⟵ ∴ ب ء = ١٠سم

مثال

إذا كان حا أ : حا ب : حا حـ = ٣ : ٥ : ٧

اثبت أن جتا أ : جتا ب : جتا حـ = ١٣ : ١١ : -٧

الحل

∵ حا أ : حا ب : حا حـ = ٣ : ٥ : ٧ ∴ أَ : بَ : حَ = ٣ : ٥ : ٧

∴ $أ = ٣$ م $ب = ٥$ م $حـ = ٧$ م

∴ $جتا أ = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب حـ} = \frac{(٢٥ + ٤٩ - ٩) م^2}{٢ \times ٥ \times ٧ م^2} = \frac{١٣}{١٤}$ (١)

بالمثل $جتا ب = \frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{٢ أ حـ} = \frac{(٩ + ٤٩ - ٢٥) م^2}{٢ \times ٣ \times ٧ م^2} = \frac{١١}{١٤}$ (٢)

بالمثل $جتا حـ = \frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{٢ أ ب} = \frac{(٩ + ٢٥ - ٤٩) م^2}{٢ \times ٣ \times ٥ م^2} = \frac{-١}{٢}$ (٣)

من ١، ٢، ٣ ينتج أن جتا أ : جتا ب : جتا حـ $= \frac{١٣}{١٤} : \frac{١١}{١٤} : \frac{-١}{٢}$

بالضرب × ١٤ ينتج أن جتا أ : جتا ب : جتا حـ = ١٣ : ١١ : −٧

مثال

أ ب حـ مثلث فيه أ = ٥ سم ، ق($\hat{ب}$) = ١٢٠°
مساحته = $١٠\sqrt{٣}$ سم² أوجد كلاً من حـ و ب و ق($\hat{أ}$)

الحل

∵ أ = ٥ سم

ق($\hat{ب}$) = ١٢٠° ، مساحة Δ أ ب حـ = $١٠\sqrt{٣}$ سم²

∵ مساحة المثلث = ½ أ حـ جا ب ∴ $١٠\sqrt{٣} = \frac{١}{٢} \times ٥ \times حـ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ حـ = ٨ سم ← أولاً

∵ $ب^2 = أ^2 + حـ^2 - ٢ أ حـ جتا ب$

∴ $ب^2 = ٢٥ + ٦٤ - ٢ \times ٥ \times ٨ \times \frac{-١}{٢}$ ⇐ ب ≃ ١١,٣٦ سم ← ثانياً

∵ $جتا أ = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب حـ}$ ∴ $جتا أ = \frac{١٢٩ + ٦٤ - ٢٥}{٢ \times ١١,٣٦ \times ٨}$

∴ جتا أ = ٠,٩٢٤٣ ومنها ق($\hat{أ}$) = ٢٢° ٢٦َ ١٥ً

حل المثلث

المقصود بحل المثلث هو إيجاد أطوال أضلاعه وإيجاد قياسات زوايا المجهولة إذا علم ثلاثة من عناصر المثلث الستة على أن يكون أحد العناصر الثلاثة المعلومة ضلع على الأقل

* **الحالة الأولى:-** (إذا علم قياسا زاويتين وطول ضلع) في هذه الحالة نستخدم قاعدة الجيب

مثال

حل المثلث أ ب جـ الذي فيه

أَ = ٨ سم ، ق(أ) = ٦٠° ، ق(بَ) = ٤٠°



∴ ق(جـ) = ٨٠° ← ①

∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جَ}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٨}{جا ٦٠°} = \frac{بَ}{جا ٤٠°} = \frac{جَ}{جا ٨٠°}$

منها بَ = $\frac{٨ جا ٤٠°}{جا ٦٠}$ ≃ ٥،٩٤ سم ← ②

جَ = $\frac{٨ جا ٨٠}{جا ٦٠}$ ≃ ٩،١ سم ← ③

* **الحالة الثانية:-** (إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما) نستخدم قاعدة جيب التمام

مثال

حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أَ = ٥ سم

بَ = ٧ سم ، ق(جـ) = ٦٥°



∵ أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، ق(جـ) = ٦٥°

$\therefore$ حـَ² = أ² + بَ² − ٢ أ بَ جتا حـ

$\therefore$ حـَ² = ٢٥ + ٤٩ − ٢ × ٥ × ٧ × جتا ٦٥ منها حـَ ≃ ٦,٦٧ سم ← ①

*** ملاحظة هامة جداً :-**

(١) اذا كانت هناك زاويتين مجهولتين فى مثلث ← يفضل استخدام قاعدة جيب التمام لايجاد قياس اى منهما اذا امكن

$\because$ جتا أ = $\frac{\text{بَ² + حـَ² − أَ²}}{\text{٢ بَ حـَ}}$ $\therefore$ جتا أ = $\frac{\text{٤٩ + ٤٤,٩ − ٢٥}}{\text{٢ × ٧ × ٦,٧}}$

$\therefore$ ق(أ) = ٤٢° ٤٤َ ٢٥ً $\therefore$ ق(بَ) = ١٨٠ − (أ + حـ) = ٧٢° ١٥َ ٣٥ً

*** الحالة الثالثة :-** (اذا علم اطوال أضلاعه الثلاثة)

نستخدم قاعدة جيب التمام

مثال حل المثلث أ ب حـ الذى فيه أَ = ١٣ سم ، بَ = ١٤ سم ، حـَ = ١٥ سم

الحل

$\because$ أَ = ١٣ سم ، بَ = ١٤ سم ، حـَ = ١٥ سم

$\therefore$ جتا أ = $\frac{\text{بَ² + حـَ² − أَ²}}{\text{٢ بَ حـَ}}$ = $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ منها ق(أ) = ٥٣° ٧َ ٤٨ً

$\because$ جتا ب = $\frac{\text{أَ² + حـَ² − بَ²}}{\text{٢ أَ حـَ}}$ = $\frac{\text{٣٣}}{\text{٦٥}}$ منها ق(بَ) = ٥٩° ٢٩َ ٢٣ً

$\therefore$ ق(حـ) = ١٨٠ − (أ + ب) = ٦٧° ٢٢َ ٤٩ً

*** الحالة الرابعة (الحالة المبهمة) :-**

اذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لاحدهما

* ملاحظات هامة على الحالة المبهمة :-

* أولاً : اذا كانت الزاوية المعلومة (أ) منفرجة أو قائمة والضلعين المعلومين هما أ َ ، ب َ فان :

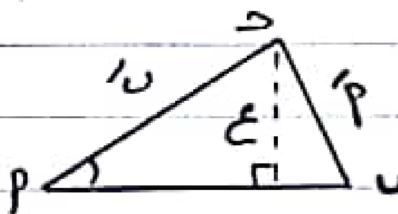
(١) اذا كان أ َ < ب َ ⟵ لا يوجد حلول

الضلع المقابل للزاوية المنفرجة أصغر من الضلع الاخر ⟵ لا يوجد حلول

(٢) اذا كان أ َ > ب َ ⟵ يوجد حل وحيد

الضلع المقابل للزاوية المنفرجة أكبر من الضلع الاخر ⟵ يوجد حل وحيد

* ثانياً اذا كانت الزاوية المعلومة (أ) حادة والضلعين المعلومين هما أ َ ، ب َ فان :-



على وجه العموم يكون ارتفاع المثلث هو ع = ب َ حا م فإن :-

(١) اذا كان ب َ حا أ > أ َ ⟵ لا يوجد حلول

اذا كان ارتفاع المثلث أكبر من الضلع المعلوم ⟵ لا يوجد حلول

(٢) اذا كان ب َ حا أ = أ َ ⟵ حل وحيد ويكون المثلث قائم الزاوية

اذا كان ارتفاع المثلث = الضلع المعلوم ⟵ حل وحيد للمثلث

(٣) اذا كان أ َ ≥ ب َ ⟵ حل وحيد للمثلث

اذا كان الضلع المقابل للزاوية الحادة ≥ الضلع الاخر ⟵ حل وحيد

(٤) اذا كان ع < أ َ < ب َ ⟵ يوجد حلان للمثلث

اذا كان الارتفاع < الضلع المقابل للزاوية الحادة < الضلع الاخر ⟵ يوجد حلان

احد الحلين عندما تكون ∠ ب في الربع الاول والاخر عندما تكون ب في الربع الثاني

مثال أوجد عدد الحلول الممكنة لكل ما يأتي :
(١) Δ أ ب جـ فيه ق(∠أ) = ١١٢° ، أ = ٧سم ، ب = ٤سم
(٢) Δ أ ب جـ فيه ق(∠أ) = ١١٢° ، أ = ٤سم ، ب = ٧سم
(٣) Δ ل م ن فيه ق(∠ل) = ٥٠° ، ل = ٤سم ، م = ٧سم
(٤) Δ ء هـ و فيه ق(∠ء) = ٦٠° ، ء = ٧,٥سم ، هـ = ٥√٣سم
(٥) Δ أ ب جـ فيه ق(∠أ) = ٤٠° ، أ = ٨,٥سم ، ب = ٧سم

الحل

(١) ∵ ق(∠أ) = ١١٢° منفرجة ، أ = ٧سم ، ب = ٤سم
∴ أ > ب ∴ يوجد للمثلث حل وحيد

(٢) ∵ ق(∠أ) = ١١٢° منفرجة ، أ = ٤سم ، ب = ٧سم
∴ أ < ب ∴ لا يوجد حل للمثلث

(٣) ∵ ق(∠ل) = ٥٠° حادة ، ل = ٤سم ، م = ٧سم
∴ ع = م جا ل = ٥,٣٧ > ل ⇐ لا يوجد حلول

(٤) ∵ ق(∠ء) = ٦٠° ، ء = ٧,٥سم ، هـ = ٥√٣سم
∴ ع = هـ جا ء = ٧,٥ = ء ← يوجد حل وحيد (مثلث قائم)

(٥) ∵ ق(∠أ) = ٤٠° ، أ = ٨,٥سم ، ب = ٧سم
∴ ع = ب جا أ = ٤,٥ < أ ، أ > ب ←
يوجد حل وحيد

* **ملاحظة :-**
في الأسئلة السابقة باستخدام قاعدة الجيب لإيجاد حل المثلث إذا كان المثلث له حلول

مثال

بين ما اذا كان هناك حلول للمثلث أ ب حـ أم لا ثم أوجد هذه الحلول إن امكن اذا كان
ق(أ̂) = ٣٠° ، أ = ٦ سم ، ب = ٩ سم

الحل

∵ ق(أ̂) = ٣٠° حادة ، أ = ٦ سم ، ب = ٩ سم

∴ ع = ٩ جا ٣٠° = ٤,٥ سم ∴ ع < أ < ب

∴ يوجد حلان للمثلث أ ب حـ

∵ أ / جا أ = ب / جا ب = حـ / جا حـ ∴ ٦ / جا ٣٠° = ٩ / جا ب = حـ / جا حـ

∴ جا ب = ٩ جا ٣٠° / ٦ ∴ جا ب = ٣/٤ موجبة

∴ ب تقع في الربع الاول أو ب تقع في الربع الثاني

(١) اذا كانت ب تقع في الربع الاول:

∴ ق(ب̂) ≃ ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً

∴ ق(حـ̂) = ١٠١° ٢٤َ ٣٥ً

∴ ٦ / جا ٣٠° = حـ / جا(١٠١° ٢٤َ ٣٥ً)

منها حـ = ١١,٧٦ سم

(٢) اذا كانت ب تقع في الربع الثاني

∴ ق(ب̂) = ١٨٠ − (٤٨° ٣٥َ ٢٥ً)

∴ ق(ب̂) = ١٣١° ٢٤َ ٣٥ً

∴ ق(حـ̂) = ١٨° ٣٥َ ٢٥ً

∴ ٦ / جا ٣٠ = حـ / جا(١٣١° ٢٤َ ٢٥ً)

منها حـ = ٣,٨٣ سم